

Questions de cours

Vous devez citer correctement l'énoncé puis le démontrer.

1. Lemme d'abel.
2. $\sup\{r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ soit bornée.}\} = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tende vers 0.}\} = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \mid \sum a_n r^n \text{ converge.}\}.$
3. Pour $r < R$, on a $\int_0^{2\pi} e^{-int} f(re^{it}) dt = 2\pi a_n r^n.$

Exercices

Exercice 1 (X PC)

1. Soient $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $f : z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On suppose que le rayon de convergence de f est égal à $+\infty$ et que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.
2. Que dire si f n'est plus bornée, mais est telle qu'il existe $A > 0$, $B > 0$ et un entier $d \geq 0$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait

$$|f(z)| \leq A|z|^d + B$$

Exercice 2 (Mines PC)

Soient $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $f : z \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = a_0 + \dots + a_n$.
Que dire du rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} S_n z^n$?

Exercice 3 (X PC)

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle. On suppose que la série entière de terme général $a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant. Quel est le rayon de convergence de la série entière de terme général $P(n)a_n x^n$?

Exercice 4 (Mines PSI)

Soit q un réel tel que $|q| < 1$.

1. Trouver les fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que:
 $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (1 + qx)f(qx).$
2. Montrer que ces fonctions sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (ENS PC)

Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$.

1. Déterminer le rayon de convergence de f .
2. Déterminer la limite éventuelle de $t \in [0, 1[\mapsto f(t)$ lorsque $t \rightarrow 1^-$.
3. Soit $z = e^{2ip\pi/q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le comportement de $t \in [0, 1[\mapsto f(tz)$ lorsque $t \rightarrow 1^-$.

Exercice 6 (X-ENS PSI)

Soient $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $S_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

1. On suppose que la série de terme général a_n est convergente de somme $A \neq 0$.
 - (a) Montrer que $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ est de rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
 - (b) Soit $g : x \in]-1, 1[\mapsto \frac{S_a(x)}{1-x}$. Montrer que g est développable en série entière et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $g^{(n)}(0)$.
 - (c) Montrer que $g(x) \sim \frac{A}{1-x}$ et en déduire $\lim_{x \rightarrow 1^-} S_a(x)$.
2. On suppose ici que la suite a est positive, telle que la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ soit de rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et la série de terme général a_n soit divergente. Que peut-on dire de $\lim_{x \rightarrow 1^-} S_a(x)$?
3. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = (-1)^n$, montrer que $\lim_{x \rightarrow 1^-} S_a(x)$ est finie.

Exercice 7 (ENS PC)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent de $f_n : t \mapsto \sum_{i=n}^{+\infty} t^i$ lorsque $t \rightarrow 1^-$.

2. Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $a_n \sim 1$. Soit $g : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

Déterminer le rayon de convergence de g . Donner un équivalent de $g(t)$ lorsque $t \rightarrow 1^-$.