

Questions de cours

Vous devez citer correctement l'énoncé puis le démontrer.

- $\sup\{r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ soit bornée.}\} = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tende vers } 0.\} = \sup\{r \in \mathbb{R}^+ \mid \sum a_n r^n \text{ converge.}\}.$
- Pour $r < R$, on a $\int_0^{2\pi} e^{-int} f(re^{it}) dt = 2\pi a_n r^n$.
- La fonction génératrice d'une variable aléatoires à valeurs entières caractérise la loi de la variable.

Exercices de Séries Entières

Exercice 1 (X PC)

- Soient $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $f : z \in \mathbb{C} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On suppose que le rayon de convergence de f est égal à $+\infty$ et que f est bornée sur $\mathbb{C}$. Montrer que f est constante.
- Que dire si f n'est plus bornée, mais est telle qu'il existe $A > 0$, $B > 0$ et un entier $d \geq 0$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait

$$|f(z)| \leq A|z|^d + B$$

Exercice 2 (Mines PC)

Soient $(a_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $f : z \mapsto \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.
On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = a_0 + \dots + a_n$.
Que dire du rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} S_n z^n$?

Exercice 3 (X PC)

Soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite réelle. On suppose que la série entière de terme général $a_n x^n$ a un rayon de convergence $R > 0$. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant. Quel est le rayon de convergence de la série entière de terme général $P(n)a_n x^n$?

Exercice 4 (ENS PC)

Soit $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$.

- Déterminer le rayon de convergence de f .
- Déterminer la limite éventuelle de $t \in [0, 1[\mapsto f(t)$ lorsque $t \rightarrow 1^-$.
- Soit $z = e^{2ip\pi/q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le comportement de $t \in [0, 1[\mapsto f(tz)$ lorsque $t \rightarrow 1^-$.

Exercices de Probabilités

Exercice 5 (Mines-Ponts PC)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On pose $U = |X - Y|$ et $V = \min\{X, Y\}$.

1. Déterminer la loi de (U, V) .
2. En déduire les lois de U et de V .
3. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 6 (ENS PC)

Soient $p \in]0, 1[$ et $(X_i)_i \geq 1$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant une loi géométrique de paramètre p .

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ et $Z_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, $\alpha_n = E(Y_n)$ et $\beta_n = E(Z_n)$.

1. Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont monotones.
2. Exprimer α_n en fonction de n .
3. Déterminer la limite de (β_n)

Exercice 7 (Centrale MP)

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant la loi de X , et N une variable aléatoire indépendante des X_i et à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour $\omega \in \Omega$, on pose

$$S(\omega) = \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega).$$

1. Soient G_X , G_S , G_N les séries génératrices de X , S , et N . Montrer : $\forall t \in [0, 1], G_S(t) = G_N \circ G_X(t)$.
2. On suppose que X et N possèdent une espérance. Montrer que S possède une espérance et la calculer.
3. On suppose que X et N ont un moment d'ordre 2. Montrer que S possède un moment d'ordre 2 et calculer $\mathbb{E}(S^2)$.

Exercice 8 (Classique)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que X est infiniment divisible si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe n variables aléatoires $X_{1,n}, \dots, X_{n,n}$ i.i.d., à valeurs dans $\mathbb{N}$, telles que

$$X \sim \sum_{i=1}^n X_{i,n}.$$

1. Soient $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{N}$, N une variable aléatoire de Poisson indépendante de $(Y_n)_{n \geq 1}$. On pose

$$S = \sum_{i=1}^N Y_i.$$

Montrer que S est infiniment divisible.

2. Désormais, on suppose X infiniment divisible. Montrer que $\mathbb{P}(X = 0) > 0$, en déduire qu'il existe un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ sur lequel $\ln(G_X)$ est définie.
3. On admet que $\ln(G_X)$ est développable en série entière au voisinage de l'origine. Montrer que les coefficients d'indices ≥ 1 du développement sont dans $\mathbb{R}^+$ et en déduire une réciproque du résultat de (a).