

Questions de cours

Vous devez citer correctement l'énoncé puis le démontrer.

1. La fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs entières caractérise la loi de la variable.
2. X admet une espérance si et seulement si G_X est dérivable en 1 et $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$.
3. Soit $A \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Exercices d'Algèbre bilinéaire

Exercice 1 (Mines MP)

Soit E un espace euclidien de dimension n . La famille $(x_1, \dots, x_p)$ est dite obtusangle si $\forall i \neq j, \langle x_i, x_j \rangle < 0$.

- (a) Montrer que si $(x_1, \dots, x_p)$ est obtusangle et si $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^n$ alors

$$\left\| \sum_{i=1}^p |\lambda_i| x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \right\|.$$

En déduire que $p \leq n + 1$.

- (b) Montrer qu'il existe des vecteurs unitaires $u_1, \dots, u_{n+1}$ tels que $\forall i \neq j, \langle u_i, u_j \rangle = -1/n$.
- (c) Montrer que si les vecteurs $u_1, \dots, u_{n+1}$ sont unitaires et vérifient, pour tous $i \neq j, \langle u_i, u_j \rangle = \alpha < 0$, alors $\alpha = -1/n$.

Exercice 2 (X PC)

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in GL_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer l'existence de $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que $M = OT$.
2. Montrer que $(\det M)^2 \leq \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n m_{i,j}^2 \right)$.

Exercice 3 (ENS PSI)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(A) = \left\{ \frac{X^\top A X}{X^\top X}, X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\} \subset \mathbb{R}$.

1. Montrer que les valeurs propres réelles de A sont dans $\mathcal{F}(A)$.
2. Si A est symétrique réelle, montrer que $\mathcal{F}(A)$ est un segment et préciser ses bornes.
3. On dit que A est entièrement inversible si $0 \notin \mathcal{F}(A)$.
Montrer que si A est entièrement inversible alors A^{-1} existe et est entièrement inversible. Montrer que toutes les sous-matrices carrées obtenues en supprimant les mêmes lignes et colonnes de A sont entièrement inversibles.

Exercice 4 (X PC)

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

- (a) Caractériser les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall X \in \mathbb{R}^n, \langle AX, X \rangle = 0$.
- (b) Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétriques et nilpotentes.

Exercice 5 (X PC)

Soit $M \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $\det(M) > 0$. Montrer que 1 est valeur propre de M .

Exercices de Probabilités

Exercice 6 (Mines-Ponts PC)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On pose $U = |X - Y|$ et $V = \min\{X, Y\}$.

1. Déterminer la loi de (U, V) .
2. En déduire les lois de U et de V .
3. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 7 (ENS PC)

Soient $p \in]0, 1[$ et $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant une loi géométrique de paramètre p .

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ et $Z_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, $\alpha_n = E(Y_n)$ et $\beta_n = E(Z_n)$.

1. Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont monotones.
2. Exprimer α_n en fonction de n .
3. Déterminer la limite de (β_n)

Exercice 8 (ENS PC)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n) = 0$ et qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n^2) \leq M$.

Soit $\varepsilon > 0$. A-t-on toujours

$$P(|X_1 + \dots + X_n| \geq n\varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow +\infty?$$