

Questions de cours

Vous devez citer correctement l'énoncé puis le démontrer.

1. Soient F un ss ev de E un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$
 $pop = p$ et $\forall x \in E \|p(x)\| \leq \|x\| \iff p$ est une projection orthogonale sur $\text{Im } p$
2. Soient $u \in \mathcal{L}(E)$ et B une bon de E . u est un endomorphisme auto-adjoint ssi $\text{Mat}_B(u)$ est symétrique.
3. Soit $A \in S_n^+(\mathbb{R})$, il existe une unique matrice $B \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.

Exercices

Exercice 1 (Mines MP)

Soit E un espace euclidien de dimension n . La famille $(x_1, \dots, x_p)$ est dite obtusangle si $\forall i \neq j, \langle x_i, x_j \rangle < 0$.

1. Montrer que si $(x_1, \dots, x_p)$ est obtusangle et si $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^n$ alors

$$\left\| \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \right\| \leq \sum_{i=1}^p \lambda_i \|x_i\|.$$

En déduire que $p \leq n + 1$.

2. Montrer qu'il existe des vecteurs unitaires $u_1, \dots, u_{n+1}$ tels que $\forall i \neq j, \langle u_i, u_j \rangle = -1/n$.
3. Montrer que si les vecteurs $u_1, \dots, u_{n+1}$ sont unitaires et vérifient, pour tous $i \neq j, \langle u_i, u_j \rangle = \alpha < 0$, alors $\alpha = -1/n$.

Exercice 2 (X PC)

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in GL_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer l'existence de $O \in O_n(\mathbb{R})$ et $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure telles que $M = OT$.
2. Montrer que $(\det M)^2 \leq \prod_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n m_{i,j}^2 \right)$.

Exercice 3 (ENS PSI)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(A) = \left\{ \frac{X^\top A X}{X^\top X}, X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\} \subset \mathbb{R}$.

1. Montrer que les valeurs propres réelles de A sont dans $\mathcal{F}(A)$.
2. Si A est symétrique réelle, montrer que $\mathcal{F}(A)$ est un segment et préciser ses bornes.
3. On dit que A est entièrement inversible si $0 \notin \mathcal{F}(A)$.
 Montrer que si A est entièrement inversible alors A^{-1} existe et est entièrement inversible. Montrer que toutes les sous-matrices carrées obtenues en supprimant les mêmes lignes et colonnes de A sont entièrement inversibles.

Exercice 4 (X PC)

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique.

- (a) Caractériser les $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall X \in \mathbb{R}^n, \langle AX, X \rangle = 0$.
- (b) Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétriques et nilpotentes.

Exercice 5 (X PC)

Soit $M \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $\det(M) > 0$. Montrer que 1 est valeur propre de M .

Exercice 6 (X PC)

Déterminer

$$\inf \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} (|t| - a - b \cos t)^2 dt : (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 7 (X PC)

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $P_n = ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$.

1. Si $n \geq 1$, montrer que P_n est de degré n et admet n racines distinctes dans $] -1, 1[$.
2. Trouver un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$ pour lequel la famille $(P_n)_{n \geq 0}$ est orthogonale. La famille est-elle orthonormée ?