

## Questions de cours

Vous devez citer correctement l'énoncé puis le démontrer.

1. Soient  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $B$  une base de  $E$ .  $u$  est un endomorphisme auto-adjoint ssi  $\text{Mat}_B(u)$  est symétrique.
2. Les boules de  $E$  sont des convexes de  $E$ .
3. Les boules fermées sont des fermés.

## Exercices sur les Espaces Normés

### Exercice 1 (X PC)

Soient  $(E, \|\cdot\|)$  un espace vectoriel normé et  $Y$  une partie non vide de  $E$ . Si  $x \in E$ , on pose

$$f(x) = \inf\{\|x - y\|, y \in Y\}.$$

Montrer que  $f$  est 1-lipschitzienne.

### Exercice 2 (Mines PC)

Soient  $E = \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$  et  $N : f \in E \mapsto |f(a)| + \int_a^b |f'(t)| dt$ .

Montrer que  $N$  est une norme. Comparer  $N$  et  $\|\cdot\|_\infty$ .

### Exercice 3 (X PC adapté)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$  telle que  $\text{Sp}(A) = \{1\}$ . On suppose que la suite  $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$  est bornée.

1. Supposons dans toute la suite de l'énoncé que  $A \neq I_n$ . Ecrire  $A$  comme la somme d'une matrice diagonalisable et nilpotente.
2. Trouver une base de  $\mathbb{C}^n$  faisant intervenir la matrice nilpotente précédemment trouvée.
3. A l'aide d'un vecteur  $x_0$  que l'on déterminera, et d'une norme  $N$  bien choisie, exprimer  $A^k x_0$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$  puis sa norme et aboutir à une contradiction. On pourra introduire la norme matricielle subordonnée définie par  $\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{N(Ax)}{N(x)}$ .

## Exercices d'Algèbre bilinéaire

### Exercice 4 (Mines MP)

Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$ . La famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est dite obtusangle si  $\forall i \neq j, \langle x_i, x_j \rangle < 0$ .

1. Montrer que si  $(x_1, \dots, x_p)$  est obtusangle et si  $(\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{R}^n$  alors

$$\left\| \sum_{i=1}^p |\lambda_i| x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \right\|.$$

En déduire que  $p \leq n + 1$ .

2. Montrer qu'il existe des vecteurs unitaires  $u_1, \dots, u_{n+1}$  tels que  $\forall i \neq j, \langle u_i, u_j \rangle = -1/n$ .
3. Montrer que si les vecteurs  $u_1, \dots, u_{n+1}$  sont unitaires et vérifient, pour tous  $i \neq j, \langle u_i, u_j \rangle = \alpha < 0$ , alors  $\alpha = -1/n$ .

### Exercice 5 (X PC)

Soit  $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in GL_n(\mathbb{R})$ .

1. Montrer l'existence de  $O \in O_n(\mathbb{R})$  et  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  triangulaire supérieure telles que  $M = OT$ .
2. Montrer que  $(\det M)^2 \leq \prod_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n m_{i,j}^2 \right)$ .

### Exercice 6 (ENS PSI)

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{F}(A) = \left\{ \frac{X^\top A X}{X^\top X}, X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \right\} \subset \mathbb{R}$ .

1. Montrer que les valeurs propres réelles de  $A$  sont dans  $\mathcal{F}(A)$ .
2. Si  $A$  est symétrique réelle, montrer que  $\mathcal{F}(A)$  est un segment et préciser ses bornes.
3. On dit que  $A$  est entièrement inversible si  $0 \notin \mathcal{F}(A)$ .  
Montrer que si  $A$  est entièrement inversible alors  $A^{-1}$  existe et est entièrement inversible. Montrer que toutes les sous-matrices carrées obtenues en supprimant les mêmes lignes et colonnes de  $A$  sont entièrement inversibles.

### Exercice 7 (X PC)

Soit  $M \in O_3(\mathbb{R})$  telle que  $\det(M) > 0$ . Montrer que 1 est valeur propre de  $M$ .