

Questions de cours

Vous devez citer correctement l'énoncé puis le démontrer.

1. Si E est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors f est continue.
2. Soient F un fermé et $x \in E$. La distance de x à F est atteinte.
3. $d(x, A) = 0 \iff \exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, \lim x_n = x \iff \forall r \in \mathbb{R}^{+*}, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$

Exercices sur les Espaces Normés

Exercice 1 (X PC)

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et Y une partie non vide de E . Si $x \in E$, on pose

$$f(x) = \inf\{\|x - y\|, y \in Y\}.$$

Montrer que f est 1-lipschitzienne.

Exercice 2 (Mines PC)

Soient $E = \mathcal{C}^1([a, b], \mathbb{C})$ et $N : f \in E \mapsto |f(a)| + \int_a^b |f'(t)| dt$.

Montrer que N est une norme. Comparer N et $\|\cdot\|_{\infty}$.

Exercice 3 (X PC adapté)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{Sp}(A) = \{1\}$. On suppose que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée.

1. Supposons dans toute la suite de l'énoncé que $A \neq I_n$. Ecrire A comme la somme d'une matrice diagonalisable et nilpotente.
2. Trouver une base de $\mathbb{C}^n$ faisant intervenir la matrice nilpotente précédemment trouvée.
3. A l'aide d'un vecteur x_0 que l'on déterminera, et d'une norme N bien choisie, exprimer $A^k x_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ puis sa norme et aboutir à une contradiction. On pourra introduire la norme matricielle subordonnée définie par $\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{N(Ax)}{N(x)}$.

Exercice 4 (Mines PC)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose

$$N(u) = \sup\{\|u(x)\|, x \in E \text{ et } \|x\| = 1\}.$$

1. Montrer que N définit une norme sur $\mathcal{L}(E)$.
2. Soient u et v dans $\mathcal{L}(E)$. Comparer $N(v \circ u)$ à $N(u)N(v)$.
3. Soit $u \in S(E)$. Montrer que $u \in S^{++}(E) \iff \inf\{\langle x, u(x) \rangle, x \in E \text{ et } \|x\| = 1\} > 0$.

Exercice 5 (ENS PC)

Soit $(x_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que (x_n) est de carré sommable si la série de terme général x_n^2 converge. On note E l'ensemble des suites réelles de carré sommable.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Si x et y sont dans E , on pose

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

Montrer que cette application définit un produit scalaire sur E .

3. Soit, pour $k \in \mathbb{N}$, $x^k \in E$. On suppose que $x^k \rightarrow x$ c'est-à-dire que $\|x^k - x\| \rightarrow 0$. Soit $y \in E$. Montrer que $\langle y, x^k \rangle \rightarrow \langle y, x \rangle$ lorsque $k \rightarrow +\infty$.
4. Soit, pour $k \in \mathbb{N}$, $x^k \in E$. On suppose que $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n^k \rightarrow x_n$. Soit $y \in E$. Montrer que $\langle y, x^k \rangle \rightarrow \langle y, x \rangle$ lorsque $k \rightarrow +\infty$.

Exercice 6 (ENS PC)

Soient $E = C^0([a, b], \mathbb{R})$, E_n l'ensemble des fonctions polynomiales sur $[a, b]$ de degré $\leq n$, $(x_0, \dots, x_n) \in [a, b]^{n+1}$ avec $x_0 < x_1 < \dots < x_n$. Si $f \in E$, on note P_f l'unique élément de E_n tel que $\forall i \in \{0, 1, \dots, n\}$, $P_f(x_i) = f(x_i)$. Soit $\Phi : f \in E \mapsto P_f \in E_n$.

- (a) Montrer que Φ est linéaire et que c'est un projecteur.
- (b) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall f \in E$, $\|\Phi(f)\|_{\infty} \leq C\|f\|_{\infty}$.
- (c) Si $f \in E$, montrer qu'il existe $Q \in E_n$ tel que $\|f - Q\|_{\infty} = d(f, E_n)$, où

$$d(f, E_n) = \inf\{\|f - P\|_{\infty}, P \in E_n\}.$$

- (d) Si $f \in E$, montrer que

$$\|f - \Phi(f)\|_{\infty} \leq (C + 1)d(f, E_n).$$