

Questions de cours

Vous devez citer correctement l'énoncé puis le démontrer.

1. Si E est de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors f est continue.
2. Soient F un fermé et $x \in E$. La distance de x à F est atteinte.
3. $d(x, A) = 0 \iff \exists (x_n) \in A^{\mathbb{N}}, \lim x_n = x \iff \forall r \in \mathbb{R}^{+*}, B(x, r) \cap A \neq \emptyset$

Exercices sur les Intégrales à paramètres

Exercice 1 (X PC)

Soit

$$f : t \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\pi x^2 - 2i\pi xt) dx.$$

1. Déterminer le domaine de définition D de f . Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur D .
2. Trouver une équation différentielle du premier ordre vérifiée par f . En déduire f .

Exercice 2 (Mines PC)

Soit

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(tx)}{t^2} e^{-t} dt.$$

1. Déterminer le domaine de définition de F .
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$.
3. Calculer $F(x)$.

Exercice 3 (Centrale PSI)

Soit

$$f : x \mapsto \int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos t + x^2) dt.$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et que f est paire.
2. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2) = 2f(x)$.
3. Calculer $f(x)$ en distinguant les trois cas : $|x| = 1$, $|x| < 1$ et $|x| > 1$.

Exercices sur les Espaces Normés

Exercice 4 (X PC)

Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé et Y une partie non vide de E . Si $x \in E$, on pose

$$f(x) = \inf\{\|x - y\|, y \in Y\}.$$

Montrer que f est 1-lipschitzienne.

Exercice 5 (Mines PC)

Soient $E = C^1([a, b], \mathbb{C})$ et $N : f \in E \mapsto |f(a)| + \int_a^b |f'(t)| dt$.

Montrer que N est une norme. Comparer N et $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 6 (X PC adapté)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\text{Sp}(A) = \{1\}$. On suppose que la suite $(A^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée.

1. Supposons dans toute la suite de l'énoncé que $A \neq I_n$. Ecrire A comme la somme d'une matrice diagonalisable et nilpotente.
2. Trouver une base de $\mathbb{C}^n$ faisant intervenir la matrice nilpotente précédemment trouvée.
3. A l'aide d'un vecteur x_0 que l'on déterminera, et d'une norme N bien choisie, exprimer $A^k x_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ puis sa norme et aboutir à une contradiction. On pourra introduire la norme matricielle subordonnée définie par $\|A\| = \sup_{x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{N(Ax)}{N(x)}$.

Exercice 7 (ENS PC)

Soit $(x_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On dit que (x_n) est de carré sommable si la série de terme général x_n^2 converge. On note E l'ensemble des suites réelles de carré sommable.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Si x et y sont dans E , on pose

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n y_n.$$

Montrer que cette application définit un produit scalaire sur E .

3. Soit, pour $k \in \mathbb{N}$, $x^k \in E$. On suppose que $x^k \rightarrow x$ c'est-à-dire que $\|x^k - x\| \rightarrow 0$. Soit $y \in E$. Montrer que $\langle y, x^k \rangle \rightarrow \langle y, x \rangle$ lorsque $k \rightarrow +\infty$.
4. Soit, pour $k \in \mathbb{N}$, $x^k \in E$. On suppose que $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n^k \rightarrow x_n$. Soit $y \in E$. Montrer que $\langle y, x^k \rangle \rightarrow \langle y, x \rangle$ lorsque $k \rightarrow +\infty$.