

Exercices sur les Equations différentielles

Exercice 1 (Mines PSI)

On considère l'équation $(E_0) : y''(x) - e^x y(x) = 0$.

1. Soit y une solution de (E_0) . Étudier la convexité de y^2 . En déduire que si $y(0) = y(1) = 0$, alors y est identiquement nulle.
2. Soient y_1 et y_2 deux solutions de (E_0) , avec $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 1$, $y_2(0) = 1$, $y_2'(0) = 0$. Montrer que (y_1, y_2) est un système fondamental de solutions.
3. Soit $(E) : y''(x) - e^x y(x) = f$ avec f continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une solution de (E) vérifiant $y(0) = y(1) = 0$.

Exercice 2 (X PC)

Soit (E) l'équation différentielle

$$y''(x) + (1 + e^{-x^2})y(x) = 0.$$

1. Montrer que les solutions de (E) sont bornées sur $\mathbb{R}$.
2. Soit y une solution non nulle de (E) . Montrer que y s'annule au moins une fois sur tout intervalle de la forme $[a, a + \pi]$ avec $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 (Centrale PC)

Soient $\varphi : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$, (E) l'équation $y'' + (1 + \varphi)y = 0$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de (E) .

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Étudier $(f')^2 + (1 + \varphi)f^2$. En déduire que f et f' sont bornées sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer qu'il existe a et b dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ bornées telles que $f = a \cos + b \sin$ et $f' = -a \sin + b \cos$. Exprimer a' et b' . En déduire que a et b ont des limites finies en $+\infty$.
4. Montrer qu'il existe g solution de $y'' + y = 0$ telle que $f(x) - g(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 4 (X PC)

Soit ϕ une solution maximale de l'équation différentielle $y' = y^2 + x^2$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Montrer que I est borné.

Exercices de Calcul Différentiel

Exercice 5 (Mines PSI)

L'application $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$H(x, y) = \frac{x^4 y}{x^4 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0),$$

et $H(0, 0) = 0$, est-elle de classe C^1 ?

Exercice 6 (Mines PC)

1. Montrer que $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un ouvert.

2. Résoudre sur U l'équation $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x}$.

Exercice 7 (X PC)

Soit la fonction déterminant définie par

$$\det : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \det M.$$

Déterminer la différentielle de $\det$ en I_n .