

Questions de cours

Vous devez citer correctement l'énoncé puis le démontrer.

1. Théorème des accroissements finis.
2. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U convexe ouvert de $\mathbb{R}^n$. f est convexe ssi $\forall (x, y) \in U^2 : f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle$.
3. Inégalité de Jensen.

Exercices

Exercice 1 (Centrale PC)

Déterminer les extrema de $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^4 + y^4 - 4xy$.

Exercice 2 (X PC)

Soient $C = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2, x + y \leq 2\}$ et $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 y^2 (x^2 + y^2)$.
Déterminer le maximum de f sur C .

Exercice 3 (Mines PSI)

Déterminer les extrema sur $\mathbb{R}^3$ de $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$.

Exercice 4 (Mines PSI)

L'application $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$H(x, y) = \frac{x^4 y}{x^4 + y^2} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0),$$

et $H(0, 0) = 0$, est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 5 (Mines PC)

1. Montrer que $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un ouvert.
2. Résoudre sur U l'équation $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{x}$.

Exercice 6 (X PC)

Soit la fonction déterminant définie par

$$\det : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto \det M.$$

Déterminer la différentielle de $\det$ en I_n .