

Questions de cours

Vous devez citer correctement l'énoncé puis le démontrer.

1. Si la série de terme général u_n diverge alors les sommes partielles sont équivalentes $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$.
2. Pour tout $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $\sum \frac{1}{n} \sin(n\theta)$ converge.
3. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}$ converge mais $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \notin L^1(\mathbb{R}^+)$.

Exercices

Exercice 1 (Centrale PSI)

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite monotone de reels positifs.

1. Montrer que les séries de termes généraux u_n et nu_n^2 sont de même nature.
2. Le résultat reste-t-il vrai si l'on enlève une ou deux hypothèses ?

Exercice 2 (X PSI)

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que (u_n) est décroissante et que la série de terme général u_n converge.

Montrer que $nu_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 3 (X PC)

Soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de réels positifs telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{2n} u_k \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k.$$

Montrer que la série de terme général u_n converge.

Exercice 4 (X PC)

Soit $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\frac{f'(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$

1. Donner un exemple de telle fonction.
2. Montrer que la suite de terme général $\frac{f(n+1)}{f(n)}$ converge et déterminer sa limite.
3. Quelle est la nature de la série de terme général $f(n)$?

Exercice 5 (X PC)

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que $\frac{1}{x} \int_0^x tf(t) dt \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 6 (X PC)

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ décroissante et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Montrer que $xf(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$.

Exercice 7 (X PC)

Soient $f \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ intégrable et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < a < b$.

Montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$ et calculer la valeur.

Exercice 8 (X PC)

Soit $r \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\prod_{k=1}^n \left(1 - 2r \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + r^2\right)$.
2. Pour $|r| \neq 1$, calculer $I(r) = \int_0^\pi \ln(1 - 2r \cos t + r^2) dt$.