

Questions de cours

Vous devez citer correctement l'énoncé puis le démontrer.

1. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}$ converge mais $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x} \notin L^1(\mathbb{R}^+)$.
2. Formule de sous-additivité.
3. Formule des probabilités totales.

Exercices

Exercices de probabilités

Exercice 1 (Centrale PC)

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé, A et B deux événements. Montrer que $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$.

Exercice 2 (ENS PC)

Soient $p \in]0, 1[$ et $(X_i)_i \geq 1$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant une loi géométrique de paramètre p . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ et $Z_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, $\alpha_n = E(Y_n)$ et $\beta_n = E(Z_n)$.

1. Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont monotones.
2. Exprimer α_n en fonction de n .
3. Déterminer la limite de (β_n)
4. **Bonus** $\frac{5}{2}$: Déterminer un équivalent de β_n .

Exercice 3 (Mines-Ponts PC)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On pose $U = |X - Y|$ et $V = \min\{X, Y\}$.

1. Déterminer la loi de (U, V) .
2. En déduire les lois de U et de V .
3. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 4 (ENS PSI)

Soit $s > 1$. On pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = \lambda n^{-s}$. À quelle condition sur λ la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définit-elle une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$?
2. On note Q_s la loi ainsi définie. Admet-elle une espérance ?
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $A_k = k\mathbb{N}^*$. Montrer que les A_p forment une famille d'événements mutuellement indépendants (au sens de Q_s) lorsque p parcourt l'ensemble des nombres premiers.
4. On ordonne les nombres premiers : $p_1 = 2 < p_2 = 3 < \dots < p_n < \dots$.

Montrer que $\zeta(s) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - p_n^{-s}}$.

5. Nature de la série de terme général $\frac{1}{p_n}$?

Exercices d'intégration

Exercice 5 (Mines-Ponts PSI)

Soit $p \in \mathbb{R}$. Déterminer selon p l'existence et la valeur de
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^p(x)}{\cos^p(x) + \sin^p(x)} dx.$$

Exercice 6 (Mines-Ponts MP)

1. Soit $m > 0$. Calculer $I_m = \int_0^\pi \frac{dt}{1 + m \sin^2 t}$.
2. Discuter suivant $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ l'intégrabilité sur $\mathbb{R}_+^*$ de $t \mapsto \frac{t^\beta}{1 + t^\alpha \sin^2 t}$.

Exercice 7 (Mines-Ponts MP)

Soit $a > -1$; f est une application continûment dérivable de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, tendant vers 0 en $+\infty$ et telle que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^{a+1} |f'(t)| dt$ converge.

1. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{a+1} f(x) = 0$ et que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^a f(t) dt$ converge.
2. Montrer que si $a > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} t^a f(t) dt$ converge absolument.

Exercice 8 (X MP)

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, continue, telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$. Déterminer :

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+a) - f(x)| dx.$$