

Questions de cours

Vous devez citer correctement l'énoncé puis le démontrer.

1. Variance de la loi géométrique.
2. Variance de la loi de Poisson.
3. Inégalité de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

Exercices

Exercice 1 (Centrale PC)

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé, A et B deux événements.

Montrer que $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \frac{1}{4}$.

Exercice 2 (Mines-Ponts PC)

Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$.

Soit N une variable aléatoire indépendante des X_i et suivant une loi de Poisson de paramètre $a > 0$.

Déterminer la loi de $Y = X_1 + \dots + X_N$.

Exercice 3 (Mines-Ponts PC)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$.

Trouver la loi conditionnelle de X sachant $X + Y = n$.

Exercice 4 (ENS PC)

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes.

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n) = 0$ et qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n^2) \leq M$.

Soit $\varepsilon > 0$. A-t-on toujours $P(|X_1 + \dots + X_n| \geq n\varepsilon) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$?

Exercice 5 (ENS PSI)

Soit $s > 1$. On pose $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $q_n = \lambda n^{-s}$. À quelle condition sur λ la suite $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définit-elle une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$?
2. On note Q_s la loi ainsi définie. Admet-elle une espérance ?
3. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $A_k = k\mathbb{N}^*$. Montrer que les A_p forment une famille d'événements mutuellement indépendants (au sens de Q_s) lorsque p parcourt l'ensemble des nombres premiers.
4. On ordonne les nombres premiers : $p_1 = 2 < p_2 = 3 < \dots < p_n < \dots$.

Montrer que $\zeta(s) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \prod_{n=1}^N \frac{1}{1 - p_n^{-s}}$.

5. Nature de la série de terme général $\frac{1}{p_n}$?

Exercice 6 (Mines-Ponts PC)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On pose $U = |X - Y|$ et $V = \min\{X, Y\}$.

1. Déterminer la loi de (U, V) .
2. En déduire les lois de U et de V .
3. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes ?

Exercice 7 (ENS PC)

Soient $p \in]0, 1[$ et $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant une loi géométrique de paramètre p .

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ et $Z_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$, $\alpha_n = E(Y_n)$ et $\beta_n = E(Z_n)$.

1. Montrer que les suites (α_n) et (β_n) sont monotones.
2. Exprimer α_n en fonction de n .
3. Déterminer la limite de (β_n)