

Questions de cours

Vous devez citer correctement l'énoncé puis le démontrer.

1. Existence d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme d'espace vectoriel de dimension finie.
2. Déterminant de Vandermonde.
3. Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.

Exercices

Exercice 1 (X PC)

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\sum_{j=1}^n |m_{i,j}| < 1$ pour tout i . Montrer que $I_n - M$ est inversible.

Exercice 2 (X PC)

Déterminer les $A \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $\forall M \in GL_n(\mathbb{R}), AM = MA$.

Exercice 3 (Classique)

1. Soit φ une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \varphi(AB) = \varphi(BA).$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(M) = \lambda \operatorname{tr}(M).$$

2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), MN = NM$.
En considérant $A \mapsto \operatorname{tr}(MA)$, montrer que M est scalaire.

Exercice 4 (X PC)

Soient E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, u et v dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $\operatorname{Im} u = \operatorname{Im} v$ et $\operatorname{rg} u = 1$.

1. Existe-t-il toujours $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$?
2. On suppose que $\ker u = \ker v$. Existe-t-il toujours $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v = \lambda u$?
3. Soit D une droite vectorielle. On pose $F = \{u \in \mathcal{L}(E), \operatorname{Im} u \subset D\}$. Cet ensemble est-il un espace vectoriel ? Si oui, déterminer sa dimension.

Exercice 5 (Classique)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $a \in \mathcal{L}(E)$. On considère les applications linéaires

$$\Phi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ u \mapsto a \circ u \end{cases} \quad \text{et} \quad \Psi : \begin{cases} \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E) \\ u \mapsto u \circ a. \end{cases}$$

Calculer les rangs respectifs de Φ et Ψ en fonction de la dimension de E et du rang de a .

Exercice 6 (X PC)

1. Soient A et B dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. Montrer que

$$|\operatorname{rg} A - \operatorname{rg} B| \leq \operatorname{rg}(A + B) \leq \operatorname{rg} A + \operatorname{rg} B.$$

2. Soient $V_1, \dots, V_k$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tels que

$$V_1 V_1^\top + \dots + V_k V_k^\top = I_n.$$

Montrer que $k \geq n$.

Exercice 7 (Classique)

Soit $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de dimension finie d'un espace vectoriel E de dimension n . Montrer que

$$\dim \left(\bigcap_{k=1}^p F_k \right) \geq \sum_{k=1}^p \dim F_k - (p-1)n.$$

Exercice 8 (Mines PC adapté)

Soient $n \geq 1$. Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \det(A + X) = \det(A) + \det(X)$.