

Questions de cours

Vous devez citer correctement l'énoncé puis le démontrer.

1. Existence d'un polynôme annulateur d'un endomorphisme d'espace vectoriel de dimension finie.
2. u est diagonalisable ssi $\prod_{\lambda \in \text{Spec}(u)} (X - \lambda)$ est un polynôme annulateur de u .
3. u est diagonalisable ssi il existe un polynôme annulateur de u scindé à racines simples.

Exercices

Exercice 1 (Mines PSI)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall i, j, a_{i,j} \in \mathbb{R}_+$ et $\forall i, a_{i,1} + \dots + a_{i,n} = 1$.

1. Montrer que 1 est valeur propre de A .
2. Montrer que toutes les valeurs propres complexes de A sont de module ≤ 1 .
3. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1 est valeur propre de A , montrer que λ est racine de l'unité.

Exercice 2 (X PC)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X - 1)P' + P(1) \in \mathbb{R}_n[X]$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 3 (X PC)

Soit $T : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (3 - X)P' + X^2P'' - P \in \mathbb{R}_n[X]$. L'endomorphisme T est-il injectif ? Diagonalisable ?

Exercice 4 (X PC)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Déterminer les dimensions possibles du sous-espace de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ suivant :

$$\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), AB = BA\}.$$

Exercice 5 (X PC)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AB = BA\}$. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer sa dimension.

Exercice 6 (Centrale PSI)

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On suppose que la famille $(f^k(x))_{k \in \mathbb{N}}$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$. Montrer que la famille $(f^k(x))_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de $\mathbb{R}^n$.
2. Montrer que $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ commute avec f si et seulement s'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $g = P(f)$.

Exercice 7 (Classique)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1. Montrer que $\text{tr}(A)$ est valeur propre de A .
2. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $\text{tr}(A) \neq 0$.

Exercice 8 (Classique)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, une matrice carrée complexe. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, A^2 est diagonalisable et $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^2)$.