

Questions de cours

Vous devez citer correctement l'énoncé puis le démontrer.

1. Si χ_u est scindé à racines simples et $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $uv = vu$ alors u et v sont co-diagonalisables.
2. Si A et B sont deux matrices carrées diagonalisables et qui commutent alors elles sont co-diagonalisables.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente ssi $\forall k \in \mathbb{N}^* \operatorname{tr}(A^k) = 0$.

Exercices

Exercice 1 (Classique)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de rang 1.

1. Montrer que $\operatorname{tr}(A)$ est valeur propre de A .
2. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $\operatorname{tr}(A) \neq 0$.

Exercice 2 (Classique)

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, une matrice carrée complexe. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, A^2 est diagonalisable et $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A^2)$.

Exercice 3 (X PC)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré pair. Soit $f : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto P(M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'application f est-elle surjective ?

Exercice 4 (X PC)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f : P \in \mathbb{R}_n[X] \mapsto (X-1)P' + P(1) \in \mathbb{R}_n[X]$. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice 5 (X PC)

Soient $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Montrer qu'il existe un sous-espace de dimension 2 de $\mathbb{R}^n$ stable par f .

Exercice 6 (X PC)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AB = BA\}$. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer sa dimension.

Exercice 7 (X PC)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nilpotente. Montrer que l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que λM est semblable à M est fini.

Exercice 8 (X PC)

1. L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est-il un sous-espace vectoriel ?
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables telles que $M = A + B$.

Exercice 9 (X PC)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}(A) = 0$.

1. Montrer que A est nilpotente ou diagonalisable.
2. Est-ce toujours le cas dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 3$?