

Questions de cours

Vous devez citer correctement l'énoncé puis le démontrer.

1. Si χ_u est scindé à racines simples et $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $uv = vu$ alors u et v sont co-diagonalisables.
2. Si A et B sont deux matrices carrées diagonalisables et qui commutent alors elles sont co-diagonalisables.
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente ssi $\forall k \in \mathbb{N}^* \operatorname{tr}(A^k) = 0$.

Exercices

Exercice 1 (X PC)

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $\mathcal{C}(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AB = BA\}$. Montrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Déterminer sa dimension.

Exercice 2 (X PC)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nilpotente. Montrer que l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que λM est semblable à M est fini.

Exercice 3 (X PC)

1. L'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est-il un sous-espace vectoriel ?
2. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisables telles que $M = A + B$.

Exercice 4 (X PC)

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{tr}(A) = 0$.

1. Montrer que A est nilpotente ou diagonalisable.
2. Est-ce toujours le cas dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \geq 3$?

Exercice 5 (Centrale PC)

On pose $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de la somme de la série de terme général f_n .
2. Calculer la somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
3. La somme S est-elle continue sur D ?

Exercice 6 (X PC)

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle à déterminer.
2. Trouver une équation différentielle vérifiée par f .

Exercice 7 (Centrale MP)

Soit $r \in]-1, 1[$ et, pour $n \geq 1$, $f_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 - r^k x)$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge vers une fonction F sur un intervalle I à déterminer.
2. Montrer que F est continue sur $[-1, 1]$ puis que F vérifie $(E) \forall x \in I, (1 - rx)F(rx) = F(x)$, et en déduire qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que F est la seule solution continue de (E) telle que $F(0) = 1$.