

Questions de cours

Vous devez citer correctement l'énoncé puis le démontrer.

1. ζ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$.
2.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{t}}{e^t - 1} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}.$$
3. Soit $\alpha \in]1, +\infty[$. Déterminer la limite de la suite de terme général $x_n = \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-\alpha x} dx$.

Exercices

Exercice 1 (Centrale PC)

On pose $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de la somme de la série de terme général f_n .
2. Calculer la somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.
3. La somme S est-elle continue sur D ?

Exercice 2 (X PC)

Soit $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n n \frac{e^{-nx}}{1+n^2}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle à déterminer.
2. Trouver une équation différentielle vérifiée par f .

Exercice 3 (Centrale MP)

Soit $r \in]-1, 1[$ et, pour $n \geq 1$, $f_n(x) = \prod_{k=1}^n (1 - r^k x)$.

1. Montrer que la suite (f_n) converge vers une fonction F sur un intervalle I à déterminer.
2. Montrer que F est continue sur $] -1, 1[$ puis que F vérifie $(E) \forall x \in I, (1 - rx)F(rx) = F(x)$, et en déduire qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que F est la seule solution continue de (E) telle que $F(0) = 1$.

Exercice 4 (Mines PC)

Montrer qu'il existe ϕ développable en série entière au voisinage de 0 telle que $x\phi'(x) = x + \phi(x)^2$.

Exercice 5 (X PC)

1. Factoriser $P(X) = X^2 - (2 \operatorname{ch} a)X + 1$ sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Décomposer $\frac{1}{P(X)}$ en éléments simples.
3. Développer en série entière en zéro la fonction $x \mapsto \frac{1}{P(x)}$. Donner son rayon de convergence.

Exercice 6 (ENS PC)

- (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer un équivalent de $f_n : t \mapsto \sum_{i=n}^{+\infty} t^i$ lorsque $t \rightarrow 1^-$.
- (b) Soit $(a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On suppose que $a_n \sim 1$. Soit $g : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$. Déterminer le rayon de convergence de g . Donner un équivalent de $g(t)$ lorsque $t \rightarrow 1^-$.

Exercice 7 (ENS PC)

Soit f la somme d'une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence R .

1. Montrer que $\forall r \in]0, R[, f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) dt$.

2. Soit $g_n : z \mapsto z^n$. Si $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < r$, montrer que

$$g_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} re^{it} \frac{g_n(re^{it})}{re^{it} - z} dt.$$

3. Si $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < r < R$, montrer que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} re^{it} \frac{f(re^{it})}{re^{it} - z} dt.$$