

Exercices

Exercice 1 (Mines MP)

Soit $F_n = 2^{2^n} + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $n \neq m$, F_n et F_m sont premiers entre eux.

Exercice 2 (Centrale MP)

Trouver les $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $3^m - 2^n = 1$.

Exercice 3 (Mines MP)

Trouver le dernier chiffre de l'écriture décimale de 7^{7^7} .

Exercice 4 (Mines MP)

Soient a et r deux entiers supérieurs ou égaux à 2. Montrer que, si $a^r - 1$ est premier, alors r est premier et $a = 2$.

Exercice 5 (ENS Lyon MP)

Montrer qu'il existe un multiple de 1996 dont l'écriture décimale ne comporte que le chiffre 4.

Exercice 6 (Mines MP)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, N le nombre de diviseurs *positifs* de n et P le produit de ces diviseurs. Donner une relation entre n , N , P .

Exercice 7 (ENS Ulm MP)

Quels sont les polynômes P à coefficients rationnels tels que $P(x)$ est irrationnel pour tout irrationnel x ?

Exercice 8 (ENS Ulm MP)

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{Z}[X]$ avec $a_n \neq 0$. On pose $M = \max_{0 \leq k < n} |a_k/a_n|$.

1. Montrer que $|z| \leq 1 + M$ pour toute racine z de P .
2. On suppose qu'il existe un entier $m > M + 2$ tel que $P(m)$ est premier. Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.