

Exercices de Cours (CCINP)

Exercice 1 (CCINP MP)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f .
2. Prouver que $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$:
 - (a) **Question pour 5/2 uniquement.** en utilisant le lemme des noyaux.
 - (b) sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie. Prouver que $\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

Exercice 2 (CCINP MP)

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

1. Démontrer que :

$$E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f \implies \text{Im } f = \text{Im } f^2.$$

2. (a) Démontrer que :

$$\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2.$$

- (b) Démontrer que :

$$\text{Im } f = \text{Im } f^2 \implies E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f.$$

Exercice 3 (CCINP MP)

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\text{Im } f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?

Exercices de Cours (CCINP)

Exercice 4 (Mines MP & ENS MP)

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit G une partie finie et non vide de $\text{GL}(E)$, *stable par produit* (i.e. $g, h \in G \Rightarrow gh \in G$). On note $|G|$ son cardinal et on définit l'endomorphisme

$$p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \in \mathcal{L}(E).$$

On note aussi

$$E^G = \bigcap_{g \in G} \ker(g - \text{Id}_E) \quad (\text{sous-espace des points fixes de } G).$$

1. Montrer que G est un *sous-groupe* de $\text{GL}(E)$.
2. Montrer que p est un *projecteur* et que

$$\text{Im}(p) = E^G.$$

En déduire une expression de $\dim(E^G)$.

3. (*Bonus ENS*) (On travaille sur un corps K de caractéristique nulle.) Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on pose

$$f^* = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} s \circ f \circ s^{-1}.$$

Montrer que f^* commute avec tout $s \in G$ et que

$$f = f^* \iff f \text{ commute avec tout } s \in G.$$

Si $W \subset E$ est stable par G , montrer qu'il existe un supplémentaire G -stable de W .

Exercice 5 (Centrale MP)

Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices **nilpotentes** qui commutent deux à deux. Montrer que

$$A_1 A_2 \cdots A_n = 0.$$

Exercice 6 (Centrale PSI)

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Ker}(u^k) \subset \text{Ker}(u^{k+1})$.
2. Montrer que la suite $(\dim \text{Ker}(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est stationnaire à partir d'un certain rang.
3. On note

$$r_u = \inf\{k \in \mathbb{N} ; \text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^{k+1})\}.$$

- (a) Montrer que $r_u \leq n$.
- (b) Si l'on note d le rang de stationnarité de la suite $(\dim \text{Ker}(u^k))$, montrer que $d = r_u$.
- (c) Montrer que $E = \text{Ker}(u^d) \oplus \text{Im}(u^d)$.
- (d) Montrer que $\text{Ker}(u^k)$ et $\text{Im}(u^k)$ sont supplémentaires si et seulement si $k \geq d$ ou $k = 0$.

Exercice 7 (X PC)

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sum_{j=1}^n |m_{i,j}| < 1.$$

Montrer que la matrice $I_n - M$ est inversible.