

Exercices de Cours (CCINP)

Exercice 1 (CCINP MP)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer (avec justification) le polynôme minimal π_A de A .
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste $r_n(X)$ de la division euclidienne de X^n par $(X - 1)^2$, puis en déduire A^n .

Exercice 2 (CCINP MP)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension n , et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_n) = v,$$

où $v \in E$ est fixé.

1. Déterminer le rang de f .
2. Discuter la diagonalisabilité de f en fonction du vecteur v .

Exercice 3 (CCINP MP)

1. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si $P(u) = 0_E$, alors toute valeur propre de u est racine de P .
2. Soit $n \geq 2$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j, \\ 1 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

(autrement dit $A = J - I_n$, où J est la matrice de tous les 1).
On définit $u \in \mathcal{L}(E)$ par

$$\forall M \in E, \quad u(M) = M + \text{tr}(M) A.$$

- (a) Prouver que le polynôme $P(X) = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ est annulateur de u .
- (b) u est-il diagonalisable ? Justifier par deux méthodes (l'une utilisant la question 1).

Exercices d'oraux

Exercice 4 (Mines MP)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que A et B sont semblables en tant que matrices complexes, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

Montrer que A et B sont en réalité semblables en tant que matrices réelles.

Exercice 5 (Mines MP)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si M^p est diagonalisable et

$$\text{Ker}(M) = \text{Ker}(M^p).$$

Exercice 6 (Mines MP)

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soient $f, g, h \in \mathcal{L}(E)$ tels que $h \neq 0$ et

$$f \circ h = h \circ g.$$

Montrer que f et g ont une valeur propre commune.

Exercice 7 (Mines PSI)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *stochastique*, c'est-à-dire telle que

$$\forall i, j, a_{i,j} \geq 0, \quad \text{et} \quad \forall i, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$$

1. Montrer que 1 est valeur propre de A .
2. Montrer que toutes les valeurs propres complexes de A sont de module ≤ 1 .
3. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est de module 1 et est valeur propre de A , montrer que λ est racine de l'unité.

Exercice 8 (Mines MP)

Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $\text{rg}(AB - BA) = 1$.

- (a) Montrer que $A(\text{Im } B) \subset \text{Im } B$ ou $A(\text{Ker } B) \subset \text{Ker } B$.
- (b) Montrer que A et B sont cotrigonalisables.