

Colle 2 - Algèbre Linéaire

Elyas Benyamina

26 septembre 2025

Exercices

Exercice 1 (CCINP MP)

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f .
2. Prouver que $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$:
 - (a) **Question pour 5/2 uniquement.** en utilisant le lemme des noyaux.
 - (b) sans utiliser le lemme des noyaux.
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie. Prouver que $\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

Correction.

1. f est linéaire donc :

$$f^2 - f - 2\text{Id} = 0 \iff (f - \text{Id})(f - 2\text{Id}) = 0.$$

Ainsi, $f \circ \left(\frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\text{Id}\right) = \text{Id}$. Donc f est inversible et

$$f^{-1} = \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}\text{Id}.$$

2. (a) On a $P(X) = X^2 - X - 2 = (X + 1)(X - 2)$. Comme $X + 1$ et $X - 2$ sont premiers entre eux, d'après le lemme des noyaux :

$$\text{Ker}P(f) = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}).$$

Or $P(f) = 0$ donc $\text{Ker}P(f) = E$. D'où

$$E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}).$$

- (b) **Unicité** Soit $x \in E$. On suppose $x = a + b$ avec $a \in \text{Ker}(f + \text{Id})$ et $b \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

Alors $f(x) = f(a) + f(b) = -a + 2b$. On en déduit :

$$a = \frac{2x - f(x)}{3}, \quad b = \frac{x + f(x)}{3}.$$

Existence : Définissons $a = \frac{2x - f(x)}{3}$ et $b = \frac{x + f(x)}{3}$.

Vérification :

$$(f + \text{Id})(a) = f\left(\frac{2x - f(x)}{3}\right) + \frac{2x - f(x)}{3} = \frac{-f^2(x) + f(x) + 2x}{3} = 0$$

car $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$. Donc $a \in \text{Ker}(f + \text{Id})$.

De même :

$$(f - 2\text{Id})(b) = f\left(\frac{x + f(x)}{3}\right) - 2\left(\frac{x + f(x)}{3}\right) = \frac{f^2(x) - f(x) - 2x}{3} = 0.$$

Donc $b \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$. Ainsi $x = a + b$ avec $a \in \text{Ker}(f + \text{Id})$ et $b \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

Conclusion :

$$E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id}).$$

3. **Dans le cas de dimension finie.**

Soit $y \in \text{Im}(f + \text{Id})$. Alors $y = (f + \text{Id})(x) = f(x) + x$ pour un certain x . Vérifions :

$$(f - 2\text{Id})(y) = f(f(x) + x) - 2(f(x) + x).$$

En développant :

$$= f^2(x) + f(x) - 2f(x) - 2x = f^2(x) - f(x) - 2x = 0$$

puisque $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$. Donc $y \in \text{Ker}(f - 2\text{Id})$. Ainsi

$$\text{Im}(f + \text{Id}) \subset \text{Ker}(f - 2\text{Id}).$$

En dimension finie, $\dim \text{Im}(f + \text{Id}) = \dim E - \dim \text{Ker}(f + \text{Id})$. Or on sait que $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$. Donc

$$\dim \text{Im}(f + \text{Id}) = \dim \text{Ker}(f - 2\text{Id}).$$

L'inclusion et l'égalité des dimensions donnent l'égalité :

$$\boxed{\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id}).}$$

□

Exercice 2 (CCINP MP)

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

1. Démontrer que :

$$E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f \implies \text{Im } f = \text{Im } f^2.$$

2. (a) Démontrer que :

$$\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2.$$

(b) Démontrer que :

$$\text{Im } f = \text{Im } f^2 \implies E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f.$$

Correction.

1. Supposons $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$.

On sait toujours que $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$.

(*)

Montrons l'inclusion réciproque $\text{Im } f \subset \text{Im } f^2$. Soit $y \in \text{Im } f$. Alors $\exists x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f$, on peut écrire

$$x = f(a) + b \quad \text{avec } a \in E, b \in \text{Ker } f.$$

Alors $y = f(x) = f(f(a) + b) = f^2(a) + f(b) = f^2(a)$ car $f(b) = 0$. Donc $y \in \text{Im } f^2$.

(**)

D'après (*) et (**), on a bien

$$\boxed{\text{Im } f = \text{Im } f^2.}$$

2. (a) On a $\text{Im } f^2 \subset \text{Im } f$ et $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$.

Donc

$$\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \dim \text{Im } f = \dim \text{Im } f^2.$$

Par le théorème du rang, $\dim \text{Im } f = \text{rg } f$ et $\dim \text{Im } f^2 = \text{rg } f^2$. Comme $\dim E = \dim \text{Ker } f + \text{rg } f$, on obtient l'équivalence :

$$\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \dim \text{Ker } f = \dim \text{Ker } f^2.$$

Comme $\text{Ker } f \subset \text{Ker } f^2$, cela entraîne l'égalité :

$$\boxed{\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2.}$$

(b) Supposons $\text{Im } f = \text{Im } f^2$.

Soit $x \in \text{Im } f \cap \text{Ker } f$. Alors $\exists a \in E$ tel que $x = f(a)$ et $f(x) = 0$. Comme $x \in \text{Im } f^2$, on peut écrire $x = f^2(a)$. Donc $f^2(a) = 0 \implies a \in \text{Ker } f^2$.

Mais d'après (a), $\text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$. Donc $a \in \text{Ker } f$, ce qui implique $x = f(a) = 0$. Ainsi,

$$\text{Im } f \cap \text{Ker } f = \{0\}. (***)$$

Par le théorème du rang, $\dim \text{Im } f + \dim \text{Ker } f = \dim E$.

(****)

Les égalités (***) et (****) donnent finalement :

$$\boxed{E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f.}$$

□

Exercice 3 (CCINP MP)

Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\text{Im } f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?

Correction.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On a :

$$f(M) = AM = \begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ 2a + 4c & 2b + 4d \end{pmatrix}.$$

La condition $M \in \text{Ker } f$ équivaut à

$$a = -2c, \quad b = -2d.$$

Donc

$$M = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\text{Ker } f = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\dim \text{Ker } f = 2 \quad \text{et une base est donnée par } (M_1, M_2).$$

2. Comme $\text{Ker } f \neq \{0\}$, f n'est pas injectif.

Or f est un endomorphisme d'un espace de dimension finie ($\dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = 4$).

Donc

$$f \text{ n'est pas surjectif.}$$

3. Par le théorème du rang,

$$\text{rg } f = \dim \text{Im } f = 4 - \dim \text{Ker } f = 2.$$

Calculons des images :

$$f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad f(E_{2,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices sont non colinéaires, donc libres.

$$\text{Im } f = \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. Vérifions si $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

On a $\dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f = 2 + 2 = 4 = \dim \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Il suffit de montrer que $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$.

Soit $M \in \text{Ker } f \cap \text{Im } f$. Alors $M = aM_1 + bM_2$ et aussi $M = cM_3 + dM_4$.

Cela entraîne le système :

$$-2a = c, \quad -2b = 2d, \quad a = 2c, \quad b = 4d.$$

Ce système implique $a = b = c = d = 0$, donc $M = 0$.

On conclut :

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f.$$

□

Exercice 4 (Mines MP & ENS MP)

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit G une partie finie et non vide de $\text{GL}(E)$, *stable par produit* (i.e. $g, h \in G \Rightarrow gh \in G$). On note $|G|$ son cardinal et on définit l'endomorphisme

$$p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \in \mathcal{L}(E).$$

On note aussi

$$E^G = \bigcap_{g \in G} \ker(g - \text{Id}_E) \quad (\text{sous-espace des points fixes de } G).$$

1. Montrer que G est un *sous-groupe* de $\text{GL}(E)$.
2. Montrer que p est un *projecteur* et que

$$\text{Im}(p) = E^G.$$

En déduire une expression de $\dim(E^G)$.

3. (*Bonus ENS*) (On travaille sur un corps K de caractéristique nulle.) Pour $f \in \mathcal{L}(E)$, on pose

$$f^* = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} s \circ f \circ s^{-1}.$$

Montrer que f^* commute avec tout $s \in G$ et que

$$f = f^* \iff f \text{ commute avec tout } s \in G.$$

Si $W \subset E$ est stable par G , montrer qu'il existe un supplémentaire G -stable de W .

Correction.

1. **G est un sous-groupe.** Soit $g \in G$ non vide. Les puissances $g, g^2, g^3, \dots$ appartiennent à G (stabilité par produit). Comme G est fini, il existe $i < j$ tels que $g^i = g^j$, donc $g^{j-i} = \text{Id}_E$. Ainsi $\text{Id}_E \in G$ (car G est stable par produit), et g^{j-i-1} est l'inverse de g , donc $g^{-1} \in G$. Avec la stabilité par produit, G est bien un *sous-groupe* de $\text{GL}(E)$.

2. **p est un projecteur et $\text{Im}(p) = E^G$.**

- *Idempotence.* Pour tout $h \in G$,

$$p \circ h = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \circ h = \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} k = p,$$

car $g \mapsto gh$ est une bijection de G dans G . De même $h \circ p = p$. Alors

$$p^2 = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} p \circ h = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} p = p.$$

Donc p est un *projecteur*.

- *Image = sous-espace des points fixes.* Pour $x \in E$ et $g \in G$,

$$g(p(x)) = \frac{1}{|G|} \sum_{h \in G} gh(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{k \in G} k(x) = p(x).$$

Donc $p(x) \in E^G$, i.e. $\text{Im}(p) \subset E^G$.

Réciproquement, si $x \in E^G$, alors $g(x) = x$ pour tout $g \in G$ et

$$p(x) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} x = x.$$

Donc $x \in \text{Im}(p)$, i.e. $E^G \subset \text{Im}(p)$. Finalement,

$$\boxed{\text{Im}(p) = E^G}.$$

- *Dimension de E^G .* Pour un projecteur p , on a $\dim(\text{Im}(p)) = \text{rg}(p) = \text{tr}(p)$. Or

$$\text{tr}(p) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(g).$$

Ainsi

$$\dim(E^G) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \text{tr}(g).$$

3. (Bonus ENS)

- f^* commute avec G et caractérisation. Pour $s_0 \in G$,

$$s_0 \circ f^* = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} s_0 s f s^{-1} = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} t f (t^{-1} s_0) = \left(\frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} t f t^{-1} \right) \circ s_0 = f^* \circ s_0,$$

car $s \mapsto s_0 s$ est une bijection de G dans G . Si f commute avec tout $s \in G$, alors $s f s^{-1} = f$ et $f^* = f$. Réciproquement, si $f = f^*$, on a $s f s^{-1} = s f^* s^{-1} = f^* = f$; donc f commute avec G .

- *Supplémentaire G -stable d'un sous-espace G -stable.* Soit $W \subset E$ stable par G . Choisissons un projecteur p de E sur W (au sens linéaire). Posons

$$p^* = \frac{1}{|G|} \sum_{s \in G} s \circ p \circ s^{-1}.$$

Alors, par le même calcul que pour f^* , on vérifie $(p^*)^2 = p^*$ (c'est un projecteur) et $s p^* = p^* s$ pour tout $s \in G$. Pour $w \in W$ et $s \in G$, $s^{-1}(w) \in W$ donc $p(s^{-1}(w)) = s^{-1}(w)$ et $p^*(w) = w$: $\text{Im}(p^*) = W$. Comme p^* commute avec G , son noyau est G -stable; il fournit donc un *supplémentaire G -stable* de W :

$$E = W \oplus \ker(p^*) \quad \text{avec } \ker(p^*) \text{ } G\text{-stable.}$$

□

Exercice 5 (Centrale MP)

Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ des matrices **nilpotentes** qui commutent deux à deux. Montrer que

$$A_1 A_2 \cdots A_n = 0.$$

Correction.

On raisonne en termes d'endomorphismes. Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u_1, \dots, u_n \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes **nilpotents** qui commutent deux à deux. Il s'agit de montrer que

$$u_1 u_2 \cdots u_n = 0_E.$$

Lemme 1. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent et $F \subset E$ est un sous-espace stable par u , alors

$$F \neq \{0\} \implies \dim u(F) < \dim F.$$

Preuve. La restriction $u|_F$ est nilpotente donc non injective. Par le théorème du rang appliqué à $u|_F$, on a

$$\dim u(F) = \dim F - \dim \ker(u|_F) < \dim F.$$

□

Lemme 2. Si $g = u_1 \cdots u_m$, avec des u_i qui commutent deux à deux, alors $\text{Im}(g)$ est stable par chaque u_j .

Preuve. Pour tout $x \in E$,

$$u_j(g(x)) = u_j(u_1 \cdots u_m(x)) = (u_1 \cdots u_m)(u_j(x)) \in \text{Im}(g),$$

où l'on a utilisé la commutativité.

□

Fin de la preuve. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, posons

$$E_k := (u_k u_{k+1} \cdots u_n)(E).$$

On a $E_{n+1} := E$ et $E_k = u_k(E_{k+1})$.

D'après le lemme 2, E_{k+1} est stable par u_k . Si $E_{k+1} \neq \{0\}$, le lemme 1 donne

$$\dim E_k < \dim E_{k+1}.$$

On obtient donc une suite strictement décroissante de dimensions :

$$\dim E_1 < \dim E_2 < \cdots < \dim E_{n+1} = \dim E.$$

Comme il n'existe pas de suite strictement croissante d'entiers de longueur supérieure à $\dim E$, on doit avoir $E_1 = \{0\}$. Ainsi

$$(u_1 u_2 \cdots u_n)(E) = \{0\},$$

c'est-à-dire

$$u_1 u_2 \cdots u_n = 0_E.$$

En particulier, pour les matrices $A_1, \dots, A_n$, on obtient

$$A_1 A_2 \cdots A_n = 0.$$

□

Exercice 6 (Centrale PSI)

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Ker}(u^k) \subset \text{Ker}(u^{k+1})$.
2. Montrer que la suite $(\dim \text{Ker}(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est stationnaire à partir d'un certain rang.
3. On note

$$r_u = \inf\{k \in \mathbb{N} ; \text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^{k+1})\}.$$

- (a) Montrer que $r_u \leq n$.
- (b) Si l'on note d le rang de stationnarité de la suite $(\dim \text{Ker}(u^k))$, montrer que $d = r_u$.
- (c) Montrer que $E = \text{Ker}(u^d) \oplus \text{Im}(u^d)$.
- (d) Montrer que $\text{Ker}(u^k)$ et $\text{Im}(u^k)$ sont supplémentaires si et seulement si $k \geq d$ ou $k = 0$.

Correction.

1. Pour tout $k \geq 0$ et $x \in E$, si $x \in \text{Ker}(u^k)$, alors $u^k(x) = 0$, donc $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = 0$. D'où

$$\text{Ker}(u^k) \subset \text{Ker}(u^{k+1}) \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

2. La suite d'espaces $(\text{Ker}(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante (question 1) et chaque terme est de dimension au plus n . La suite d'entiers

$$(\dim \text{Ker}(u^k))_{k \in \mathbb{N}}$$

est donc croissante et majorée par n , donc **stationnaire** à partir d'un certain rang. □

3. (a) À chaque inclusion stricte $\text{Ker}(u^k) \subsetneq \text{Ker}(u^{k+1})$ la dimension augmente d'au moins 1. Comme la dimension ne peut dépasser n , le nombre d'inclusions strictes est $\leq n$. Par définition de r_u ,

$$r_u \leq n.$$

- (b) Par définition, d est le premier rang à partir duquel la suite des dimensions est constante, autrement dit le premier indice k tel que

$$\dim \text{Ker}(u^k) = \dim \text{Ker}(u^{k+1}).$$

Or on a toujours $\text{Ker}(u^k) \subset \text{Ker}(u^{k+1})$; l'égalité des dimensions implique alors l'égalité des sous-espaces. Donc d est le plus petit indice vérifiant $\text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^{k+1})$, c'est-à-dire

$$d = r_u.$$

- (c) Par le théorème du rang, pour tout k ,

$$\dim \text{Ker}(u^k) + \dim \text{Im}(u^k) = \dim E = n.$$

En particulier, pour $k = d$, on a

$$\dim \text{Ker}(u^d) + \dim \text{Im}(u^d) = n. \quad (*)$$

Il suffit donc de montrer l'intersection triviale. Soit $x \in \text{Ker}(u^d) \cap \text{Im}(u^d)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = u^d(y)$, et $u^d(x) = 0$. Donc

$$u^{2d}(y) = u^d(u^d(y)) = u^d(x) = 0 \Rightarrow y \in \text{Ker}(u^{2d}).$$

Or la suite des noyaux est stationnaire à partir de d , d'où $\text{Ker}(u^{2d}) = \text{Ker}(u^d)$, et par conséquent $y \in \text{Ker}(u^d)$, donc $x = u^d(y) = 0$. Ainsi

$$\text{Ker}(u^d) \cap \text{Im}(u^d) = \{0\}.$$

Avec $(*)$, on obtient

$$E = \text{Ker}(u^d) \oplus \text{Im}(u^d).$$

(d) ($\Rightarrow$) Supposons $k \geq 1$ et $\text{Ker}(u^k) \oplus \text{Im}(u^k) = E$. Alors

$$\text{Ker}(u) \cap \text{Im}(u^k) = \{0\}. \quad (\dagger)$$

Soit $x \in \text{Ker}(u^{k+1})$. Alors $u^{k+1}(x) = 0$, donc $u^k(x) \in \text{Ker}(u)$. Mais aussi $u^k(x) \in \text{Im}(u^k)$. Par $(\dagger)$, on obtient $u^k(x) = 0$, d'où $x \in \text{Ker}(u^k)$. Ainsi $\text{Ker}(u^{k+1}) \subset \text{Ker}(u^k)$, et avec l'inclusion générale inverse on a l'égalité $\text{Ker}(u^{k+1}) = \text{Ker}(u^k)$. Par minimalité de d , on conclut

$$k \geq d.$$

Le cas $k = 0$ est trivial puisque $\text{Ker}(u^0) = \{0\}$ et $\text{Im}(u^0) = E$ sont supplémentaires.

($\Leftarrow$) Si $k \geq d$, la suite des noyaux étant stationnaire, le même argument que dans (iii) (avec d remplacé par k) donne

$$\text{Ker}(u^k) \cap \text{Im}(u^k) = \{0\} \quad \text{et} \quad \dim \text{Ker}(u^k) + \dim \text{Im}(u^k) = n,$$

donc

$$\text{Ker}(u^k) \text{ et } \text{Im}(u^k) \text{ sont supplémentaires.}$$

Le cas $k = 0$ a déjà été vu.

On a donc,

$$\text{Ker}(u^k) \text{ et } \text{Im}(u^k) \text{ sont supplémentaires} \iff k \geq d \text{ ou } k = 0.$$

□

Exercice 7 (X PC)

Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sum_{j=1}^n |m_{i,j}| < 1.$$

Montrer que la matrice $I_n - M$ est inversible.

Correction.

On raisonne **par l'absurde** sur le noyau de $I_n - M$.

Supposons qu'il existe $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n$, $X \neq 0$, tel que

$$(I_n - M)X = 0 \iff X = MX.$$

Posons la norme infinie $\|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ et notons i_0 un indice tel que

$$|x_{i_0}| = \|X\|_\infty > 0.$$

En regardant l'égalité $X = MX$ sur la *ligne* i_0 :

$$x_{i_0} = \sum_{j=1}^n m_{i_0,j} x_j.$$

En prenant les modules et en utilisant $|x_j| \leq |x_{i_0}|$ pour tout j (par définition de i_0), on obtient

$$|x_{i_0}| = \left| \sum_{j=1}^n m_{i_0,j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n |m_{i_0,j}| |x_j| \leq |x_{i_0}| \sum_{j=1}^n |m_{i_0,j}| < |x_{i_0}|.$$

Contradiction.

Ainsi $\ker(I_n - M) = \{0\}$. Sur un espace de dimension finie, cela équivaut à l'inversibilité :

$$I_n - M \text{ est inversible.}$$

□