

Colle 3 - Réduction des Endomorphismes (1)

Elyas Benyamina

3 octobre 2025

Exercices

Exercice 1 (CCINP MP)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer (avec justification) le polynôme minimal π_A de A .
4. Pour $n \in \mathbb{N}$, déterminer le reste $r_n(X)$ de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$, puis en déduire A^n .

Correction.

1) Valeurs propres. On calcule le polynôme caractéristique

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_3 - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -2 & 1 \\ -1 & \lambda - 3 & 1 \\ 1 & -2 & \lambda \end{pmatrix}.$$

En additionnant à la colonne 2 la colonne 1 et en remplaçant la colonne 3 par $(\text{col}_3 + \text{col}_1)$, on fait apparaître un facteur $(\lambda-1)$ à chaque étape (opérations de type $C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i$, qui ne changent pas le déterminant). Un calcul direct (développement, ou enchaînement d'opérations élémentaires judicieuses) conduit à

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3.$$

Ainsi, 1 est l'unique valeur propre, de multiplicité algébrique 3.

$$\text{Sp}(A) = \{1\} \text{ et } \chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3$$

2) Inversibilité et diagonalisabilité. Comme $0 \notin \text{Sp}(A)$, on a $\det A = \chi_A(0) = (-1)^3 \neq 0$, donc A est inversible. Pour la diagonalisabilité : si A était diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$), elle serait semblable à $\text{diag}(1, 1, 1) = I_3$, donc égale à I_3 (car la seule matrice diagonalisable dont le spectre est réduit à $\{1\}$ est l'identité). Or $A \neq I_3$. Par ailleurs, on vérifiera que

$$\text{rg}(A - I_3) = 2 \quad \Rightarrow \quad \dim \ker(A - I_3) = 1 < 3,$$

ce qui exclut la diagonalisabilité (la dimension du sous-espace propre associé à 1 est 1 alors que la multiplicité algébrique vaut 3).

$$A \text{ est inversible mais non diagonalisable.}$$

3) Polynôme minimal. Posons $N = A - I_3$. Un calcul direct donne $N \neq 0$ et

$$N^2 = (A - I_3)^2 = 0_3.$$

Donc N est nilpotente d'indice 2 et $A = I_3 + N$ avec $N^2 = 0$. Par suite, tout polynôme annulateur de A est multiple de $(X-1)^2$ et, comme $\chi_A = (X-1)^3$, on obtient

$$\pi_A(X) = (X - 1)^2.$$

4) Reste de la division de X^n par $(X-1)^2$ et expression de A^n . Pour $n \in \mathbb{N}$, écrivons la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$:

$$X^n = (X-1)^2 Q_n(X) + r_n(X), \quad \deg r_n \leq 1,$$

que l'on paramètre sous la forme $r_n(X) = a_n X + b_n$.

En évaluant en $X = 1$ puis en dérivant et en évaluant en $X = 1$, on obtient

$$1^n = a_n \cdot 1 + b_n \implies a_n + b_n = 1, \quad n = a_n.$$

D'où $a_n = n$ et $b_n = 1 - n$, si bien que

$$r_n(X) = nX + (1 - n).$$

Comme $(A-1)^2 = 0$, on a $X^n(A) = r_n(A)$, c'est-à-dire

$$A^n = nA + (1 - n)I_3, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

□

Exercice 2 (CCINP MP)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un espace vectoriel de dimension n , et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_n) = v,$$

où $v \in E$ est fixé.

1. Déterminer le rang de f .
2. Discuter la diagonalisabilité de f en fonction du vecteur v .

Correction.

Forme $f(x) = \left(\sum x_i\right)v$, polynôme minimal et critère de diagonalisabilité

Mise en forme. Écrivons $x \in E$ dans la base e sous la forme $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$. Par linéarité,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)v.$$

Dans la base e , la matrice de f est donc la matrice A dont *toutes les colonnes sont égales* au vecteur-colonne des coordonnées de v . Autrement dit $A = v \mathbf{1}^\top$, où $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^\top$.

1) Rang. Si $v = 0$, alors $f = 0$ et donc $\text{rg } f = 0$. Si $v \neq 0$, l'image de f est la droite $\mathbb{K}v$, donc $\text{rg } f = 1$.

$$\text{rg } f = \begin{cases} 0 & \text{si } v = 0, \\ 1 & \text{si } v \neq 0. \end{cases}$$

2) Diagonalisabilité. Notons $v = \sum_{i=1}^n v_i e_i$ ses coordonnées dans e . La matrice $A = v \mathbf{1}^\top$ vérifie

$$A^2 = (v \mathbf{1}^\top)(v \mathbf{1}^\top) = (\mathbf{1}^\top v)(v \mathbf{1}^\top) = \lambda A, \quad \text{où } \lambda := \mathbf{1}^\top v = \sum_{i=1}^n v_i.$$

Autrement dit

$$A^2 = \lambda A \iff f^2 = \lambda f.$$

Il s'ensuit que le polynôme minimal de f divise $X(X - \lambda)$.

Spectre et polynôme caractéristique. Si $v = 0$, $f = 0$ et le spectre est $\{0\}$ (multiplicité n). Si $v \neq 0$, on a $\text{rg } f = 1$, donc 0 est valeur propre d'ordre géométrique $n - 1$ au moins. D'autre part A a la *trace* $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n v_i = \lambda$, qui est aussi la somme

des valeurs propres. On en déduit que le spectre de f est $\{0, \lambda\}$, avec 0 de multiplicité algébrique $n - 1$ et λ de multiplicité algébrique 1 (lorsque $\lambda \neq 0$). Ainsi

$$\chi_f(X) = X^{n-1}(X - \lambda) \quad \left(\lambda = \sum_{i=1}^n v_i \right).$$

Critère de diagonalisabilité. Le polynôme minimal divise $X(X - \lambda)$.

- Si $v = 0$, alors $\lambda = 0$ et $f = 0$: f est diagonalisable (matrice nulle).
- Si $v \neq 0$ et $\lambda \neq 0$, les racines 0 et λ sont *distinctes*, donc le polynôme minimal est scindé à racines simples : f est diagonalisable (spectre $\{0, \lambda\}$).
- Si $v \neq 0$ et $\lambda = 0$, on a $A^2 = 0$ avec $A \neq 0$: f est nilpotent de rang 1 (une seule valeur propre 0 et un bloc de Jordan non trivial), donc *non diagonalisable*.

$$f \text{ est diagonalisable} \iff (v = 0 \text{ ou } v \neq 0 \text{ et } \lambda = \sum_{i=1}^n v_i \neq 0).$$

Lecture directe dans la base e . Dans la base e , $f(x) = (\sum x_i)v$:

- $\ker f = \{x : \sum x_i = 0\}$ si $v \neq 0$, donc $\dim \ker f = n - 1$ et $\operatorname{rg} f = 1$.
- $\operatorname{tr} f = \sum v_i = \lambda$ et $\chi_f(X) = X^{n-1}(X - \lambda)$ comme ci-dessus.

□

Exercice 3 (CCINP MP)

1. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que si $P(u) = 0_E$, alors toute valeur propre de u est racine de P .
2. Soit $n \geq 2$ et $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice définie par

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j, \\ 1 & \text{si } i \neq j, \end{cases} \quad (\text{autrement dit } A = J - I_n, \text{ où } J \text{ est la matrice de tous les 1}).$$

On définit $u \in \mathcal{L}(E)$ par

$$\forall M \in E, \quad u(M) = M + \operatorname{tr}(M) A.$$

- (a) Prouver que le polynôme $P(X) = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2$ est annulateur de u .
- (b) u est-il diagonalisable ? Justifier par deux méthodes (l'une utilisant la question 1).

Correction.

1) Valeur propre $\Rightarrow$ racine du polynôme annulateur. Soit λ valeur propre de u et $x \neq 0$ tel que $u(x) = \lambda x$. Écrivons $P(X) = \sum_{k=0}^m a_k X^k$. Alors, par récurrence, $u^k(x) = \lambda^k x$ pour tout k , et

$$P(u)(x) = \sum_{k=0}^m a_k u^k(x) = \left(\sum_{k=0}^m a_k \lambda^k \right) x = P(\lambda) x.$$

Si $P(u) = 0$, alors $0 = P(u)(x) = P(\lambda) x$ et, comme $x \neq 0$, on obtient $P(\lambda) = 0$.

Toute valeur propre de u est racine de P dès que $P(u) = 0$.

2a) $(X - 1)^2$ annule u . Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$u(M) = M + \text{tr}(M) A.$$

On calcule

$$u^2(M) = u(M + \text{tr}(M)A) = M + \text{tr}(M)A + \text{tr}(M + \text{tr}(M)A) A = M + \text{tr}(M)A + (\text{tr}(M) + \text{tr}(M) \text{tr}(A))A.$$

Or $\text{tr}(A) = \text{tr}(J - I_n) = n - n = 0$, d'où

$$u^2(M) = M + 2 \text{tr}(M) A.$$

Ainsi

$$(u^2 - 2u + \text{Id})(M) = (M + 2 \text{tr}(M)A) - 2(M + \text{tr}(M)A) + M = 0,$$

pour tout M . Donc

$$P(u) = (u - \text{Id})^2 = 0.$$

2b) u n'est pas diagonalisable — *première méthode (via le spectre)*. Comme $P(u) = 0$ avec $P = (X - 1)^2$, la question 1 donne

$$(u) \subset \{1\}.$$

Si u était diagonalisable, ayant une seule valeur propre 1, on aurait nécessairement $u = \text{Id}$ (toutes les composantes propres associées à 1 recouvrent E). Mais

$$u(I_n) = I_n + \text{tr}(I_n)A = I_n + nA \neq I_n,$$

puisque $A \neq 0$ et $n \geq 2$. Contradiction. Donc

$$u \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

2b') u n'est pas diagonalisable — *deuxième méthode (via le polynôme minimal)*. Le polynôme minimal π_u divise l'annulateur $(X - 1)^2$. Si u était diagonalisable, π_u serait scindé à racines simples : ici on ne pourrait avoir que $\pi_u = X - 1$, c'est-à-dire $u = \text{Id}$, ce qui est faux puisque $u(I_n) = I_n + nA \neq I_n$. D'où à nouveau

$$u \text{ n'est pas diagonalisable.}$$

□

Exercice 4 (Mines MP)

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On suppose que A et B sont semblables en tant que matrices complexes, c'est-à-dire qu'il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

Montrer que A et B sont en réalité semblables en tant que matrices réelles.

Correction.

1) Décomposition en parties réelle et imaginaire. Par hypothèse, il existe $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

On écrit P sous la forme

$$P = P_1 + iP_2, \quad P_1, P_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

L'égalité $PB = AP$ devient

$$(P_1 + iP_2)B = A(P_1 + iP_2).$$

En séparant les parties réelles et imaginaires, on obtient le système :

$$P_1B = AP_1, \quad P_2B = AP_2.$$

2) Construction d'une combinaison réelle. Considérons une combinaison linéaire réelle :

$$Q(\lambda) := P_1 + \lambda P_2, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$Q(\lambda)B = AQ(\lambda).$$

3) Inversibilité de $Q(\lambda)$. Considérons la fonction polynomiale en λ :

$$\varphi(\lambda) := \det(Q(\lambda)) = \det(P_1 + \lambda P_2).$$

Il s'agit d'un polynôme en λ . Or $\varphi(i) = \det(P) \neq 0$ puisque P est inversible. Donc φ n'est pas le polynôme nul. Ainsi, φ ne peut avoir qu'un nombre fini de racines réelles. Il existe donc au moins un $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\varphi(\lambda_0) \neq 0,$$

c'est-à-dire que $Q(\lambda_0)$ est inversible dans $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

4) Conclusion. En posant

$$Q := Q(\lambda_0) = P_1 + \lambda_0 P_2 \in \text{GL}_n(\mathbb{R}),$$

on obtient

$$QB = AQ \implies B = Q^{-1}AQ.$$

On a donc montré que A et B sont semblables via une matrice réelle.

$A \text{ et } B \text{ sont semblables dans } \text{GL}_n(\mathbb{R}).$

□

Exercice 5 (Mines MP)

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si M^p est diagonalisable et

$$\text{Ker}(M) = \text{Ker}(M^p).$$

Correction.

Sens direct. Supposons M diagonalisable. Il existe une base $\mathcal{B}$ de $E = \mathbb{C}^n$ telle que

$$[M]_{\mathcal{B}} = \text{diag}(A, 0),$$

où A est une matrice diagonale inversible regroupant toutes les valeurs propres non nulles de M , et la matrice nulle en bas à droite correspond au sous-espace propre associé à la valeur propre 0.

Dans cette base, on a donc

$$[M^p]_{\mathcal{B}} = \text{diag}(A^p, 0).$$

Ainsi : - M^p est également diagonalisable (car A^p reste diagonale). - Le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 reste inchangé, ce qui donne

$$\text{Ker}(M^p) = \text{Ker}(M).$$

On a donc établi l'implication directe.

Sens réciproque. Supposons maintenant que M^p soit diagonalisable et que $\text{Ker}(M) = \text{Ker}(M^p)$.

Idee : on utilise le polynôme annulateur de M^p , puis on le factorise pour obtenir une décomposition en somme directe d'espaces propres de M .

Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme annulateur de M^p , avec $Q(0) \neq 0$. On peut écrire

$$Q(X) = XR(X),$$

où R n'a que des racines non nulles et simples (car M^p est diagonalisable). On a donc

$$M^p R(M^p) = 0.$$

Soit λ une valeur propre de M^p . On note μ une racine p -ième de λ (c'est-à-dire $\mu^p = \lambda$). On obtient la factorisation

$$M^p \prod_{\omega^p=1} (M - \mu\omega I_n) = 0,$$

et par le théorème des noyaux, on en déduit la décomposition

$$E = \text{Ker}(M^p) \oplus \bigoplus_{\lambda \neq 0} \bigoplus_{\omega^p=1} \text{Ker}(M - \mu\omega I_n).$$

D'après l'hypothèse $\text{Ker}(M) = \text{Ker}(M^p)$, on peut réécrire cette décomposition

$$E = \text{Ker}(M) \oplus \bigoplus_{\lambda \neq 0} \bigoplus_{\omega^p=1} \text{Ker}(M - \mu\omega I_n).$$

Ceci montre que E est somme directe de sous-espaces propres de M .

M est diagonalisable.

□

Exercice 6 (Mines MP)

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie non nulle. Soient $f, g, h \in \mathcal{L}(E)$ tels que $h \neq 0$ et

$$f \circ h = h \circ g.$$

Montrer que f et g ont une valeur propre commune.

Correction.

1) Relation par récurrence. De $f \circ h = h \circ g$, on déduit par récurrence que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k \circ h = h \circ g^k.$$

2) Passage aux polynômes. Considérons un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$. On peut écrire

$$P(f) \circ h = h \circ P(g).$$

En effet, cette propriété est vraie pour les puissances de f et g , puis par linéarité pour tout polynôme.

3) Application au polynôme caractéristique de f . Soit $\chi_f(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$ le polynôme caractéristique de f . Par le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_f(f) = 0$, donc

$$0 = \chi_f(f) \circ h = h \circ \chi_f(g).$$

Autrement dit :

$$h \circ \prod_{i=1}^n (g - \lambda_i I_E) = 0.$$

4) Conséquence sur les valeurs propres. Supposons par l'absurde que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, l'endomorphisme $(g - \lambda_i I_E)$ soit inversible. Alors leur produit $\prod_{i=1}^n (g - \lambda_i I_E)$ serait également inversible. On aurait donc

$$h \circ \left(\prod_{i=1}^n (g - \lambda_i I_E) \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad h = 0,$$

ce qui contredit l'hypothèse $h \neq 0$.

Ainsi, il existe au moins un i tel que $g - \lambda_i I_E$ ne soit pas inversible, c'est-à-dire que $\lambda_i \in \text{Sp}(g)$.

5) Conclusion. On a montré qu'il existe une valeur propre λ_i de f qui est aussi valeur propre de g . Autrement dit :

$$\text{Sp}(f) \cap \text{Sp}(g) \neq \emptyset.$$

□

Exercice 7 (Mines PSI)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice *stochastique*, c'est-à-dire telle que

$$\forall i, j, a_{i,j} \geq 0, \quad \text{et} \quad \forall i, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1.$$

1. Montrer que 1 est valeur propre de A .
2. Montrer que toutes les valeurs propres complexes de A sont de module ≤ 1 .
3. Si $\lambda \in \mathbb{C}$ est de module 1 et est valeur propre de A , montrer que λ est racine de l'unité.

Correction.

1. On considère le vecteur

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$Au = \begin{pmatrix} \sum_j a_{1j} \\ \vdots \\ \sum_j a_{nj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = u.$$

Ainsi $Au = u$, donc 1 est valeur propre de A et u est un vecteur propre associé.

$$\boxed{1 \in (A)}.$$

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A , et $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ un vecteur propre associé non nul. Normalisons X de sorte que $\|X\|_\infty = 1$, et notons i_0 un indice tel que $|x_{i_0}| = \|X\|_\infty = 1$. On a alors

$$\lambda x_{i_0} = \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} x_j.$$

En prenant les modules :

$$|\lambda| \cdot |x_{i_0}| = \left| \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} x_j \right| \leq \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} |x_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{i_0 j} \|X\|_\infty = \|X\|_\infty \cdot \sum_{j=1}^n a_{i_0 j}.$$

Comme $\|X\|_\infty = |x_{i_0}| = 1$ et $\sum_j a_{i_0 j} = 1$, il vient $|\lambda| \leq 1$.

$$\boxed{\forall \lambda \in (A), \quad |\lambda| \leq 1.}$$

3. Supposons que $|\lambda| = 1$ et $\lambda \in (A)$. Alors, dans l'inégalité précédente, toutes les égalités doivent être réalisées. Cela impose :

$$\forall j, \quad |x_j| = 1.$$

En effet, les x_j doivent tous être de module 1, et leur barycentre $\sum_j a_{i_0 j} x_j$ (combinaison convexe car $a_{i_0 j} \geq 0$ et somme = 1) est encore sur le cercle unité. La seule possibilité est que ce barycentre coïncide avec l'un des x_j . Ainsi, pour tout i , il existe j tel que $\lambda x_i = x_j$. On peut itérer : il existe une suite (i_k) telle que $x_{i_{k+1}} = \lambda x_{i_k}$. Comme l'ensemble des indices est fini, on a nécessairement $x_{i_k} = x_{i_\ell}$ pour certains $k > \ell$. Il s'ensuit que

$$\lambda^{k-\ell} x_{i_\ell} = x_{i_\ell}.$$

Comme $x_{i_\ell} \neq 0$, on obtient $\lambda^{k-\ell} = 1$.

Donc λ est une racine de l'unité.

$$\boxed{\text{Toute valeur propre de module 1 est racine de l'unité.}}$$

□