



Exercice 1:

1) la ligne 1 contient 1 nombre.

La ligne 2 contient 2 nombres.

$\vdots$

La ligne k contient k nombres.

Ainsi, on obtient:

$$\begin{aligned} N_m &= 1 + 2 + 3 + \dots + m \\ &= \frac{m(m+1)}{2} \end{aligned}$$

2) B_m est, par définition, le N_m -ième nombre impair, donc:

$$B_m = 2N_m - 1,$$

et:

$$B_m = 2 \times \frac{m(m+1)}{2} - 1$$

$$= m(m+1) - 1$$

$$= m^2 + m - 1$$

D'après la pyramide, on a :

$$A_n = B_{n-1} + 2,$$

d'où :

$$A_n = (2N_{n-1} - 1) + 2$$

$$= 2N_{n-1} + 1$$

$$= (n-1)n + 1$$

$$= n^2 - n + 1$$

3) Chaque ligne forme une progression arithmétique et donc la somme de ses éléments est donnée par :

$$\begin{aligned} (\text{pour la ligne } n): A_n + \dots + B_n &= \frac{A_n + B_n}{2} \times (\text{nb. de termes de la ligne}) \\ &= \frac{A_n + B_n}{2} \times n \\ &= \frac{n^2 - n + 1 + n^2 + n - 1}{2} \times n \\ &= n^3 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$A_n + \dots + B_n = n^3.$$

4) Notons S_n la somme de tous les entiers de la pyramide, i.e.:

$$S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + B_n.$$

La pyramide forme une progression arithmétique (constituée de nombres impairs) et dont la formule de S_n est donnée par:

$$S_n = \frac{1 + B_n}{2} \times (\text{nb. de termes})$$

$$= \frac{1 + B_n}{2} \times N_n$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} \times \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

Or, on a d'autre part: (d'après q-3)

$$S_n = \underbrace{1}_{1^3} + \underbrace{3+5}_{2^3} + \underbrace{7+9+11}_{3^3} + \dots + \underbrace{A_n + \dots + B_n}_{n^3}$$

$$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3.$$

Finalement, on obtient:

$$E_3(n) = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 \\ = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^3$$

Exercice 2:

1) Raisonnons par l'absurde et supposons que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
On suppose que la fraction est sous forme irréductible, $\therefore \text{pgcd}(p, q) = 1$.

On a:

$$2 = \frac{p^2}{q^2}, \text{ d'où: } 2q^2 = p^2.$$

On en déduit alors que p^2 est pair.
Ceci implique alors (à faire en exercice)
que p est pair, i.e. :

$$p = 2p', \quad p' \in \mathbb{N}.$$

On réinjecte " $p = 2p'$ " dans l'égalité
" $2q^2 = p^2$ " et on trouve :

$$2q^2 = 4p'^2$$

$$\Leftrightarrow q^2 = 2p'^2,$$

d'où :

$$q^2 \text{ pair},$$

et par suite : q pair également.

Ainsi, p et q sont pairs : contradiction
car $\text{pgcd}(p, q) = 1$ par hypothèse.

2) Soit $a, a', b, b' \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$a + b\sqrt{2} = a' + b'\sqrt{2}. \quad (*)$$

$$\underline{M_q}: a = a' \text{ et } b = b'.$$

D'après (*), on a : $a - a' = (b' - b)\sqrt{2}$.

Si $b' \neq b$, on obtient donc :

$$\mathbb{Q} \ni \frac{a - a'}{b' - b} = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \text{ (q.1).}$$

D'où : $b = b'$ et par suite $a = a'$.

Exercice 3 :

1) Par l'absurde.

2) Soit $n \geq 1$. Soit $x_0, x_1, \dots, x_n \in [0, 1]$

tels que : $x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n \leq 1$.

Découpons $[0, 1]$ en n intervalles égaux de longueur $\frac{1}{n}$:

$$[0, 1] = \left[0, \frac{1}{n}\right] \cup \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right] \cup \dots \cup \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$$

D'après la q. 1), il existe alors nécessairement un intervalle contenant deux

des x_i , que l'on note x_{i_1} et x_{i_2} .

Ainsi, $|x_{i_1} - x_{i_2}| \leq \frac{1}{n}$ = longueur de
 chaque inter-
 valle

Exercice 4:

Soit $n \geq 1$. On pose : $P_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} i \bar{j}$.

Ramenons-nous à un calcul de somme.
Pour ce faire, on pose :

$$U_n = \ln(P_n).$$

On a alors :

$$U_n = \ln\left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} i \bar{j}\right)$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln(i \bar{j})$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln(i) + \ln(\bar{j})$$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln(i) + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \ln(\bar{j})$$

$$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \ln(i) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \ln(\bar{j})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^m (m - (i+1) + 1) \ln(i) + \sum_{j=1}^m (j - 1 - 1 + 1) \ln(j) \\
&= \sum_{i=1}^m (m - i) \ln(i) + \sum_{j=1}^m (j - 1) \ln(j) \\
&= \sum_{i=1}^m (m - i) \ln(i) + \sum_{i=1}^m (i - 1) \ln(i) \\
&= \sum_{i=1}^m [m - i + i - 1] \ln(i) \\
&= (m - 1) \sum_{i=1}^m \ln(i) \\
&= (m - 1) \ln\left(\prod_{i=1}^m i\right) \\
&= (m - 1) \ln(m!) \\
&= \ln((m!)^{m-1})
\end{aligned}$$

Finalement, $U_m = \ln((m!)^{m-1})$,
d'où : $P_m = e^{U_m} = (m!)^{m-1}$.

Exercice 5:

Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1) $\exists! c \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = c.$

2) $\exists x \neq y \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(y).$

3) $\exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = 0.$

4) $\exists T \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x).$

⚠ T n'est pas unique.

Exercice 6:

$$1) \sum_{h=0}^{2n} (-1)^h h^2 = \sum_{\substack{h=0 \\ \text{pair}}}^{2n} (-1)^h h^2 + \sum_{\substack{h=0 \\ \text{impair}}}^{2n} (-1)^h h^2$$

1^{ère} Σ : $h = 2k$

$$= \sum_{k=0}^n (2k)^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ \text{impair}}}^{n-1} (-1)^k h^2$$

2^e Σ : $h = 2k+1$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} 4k^2 - \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^2$$

$$= 4 \sum_{k=0}^m k^2 - \sum_{k=0}^{m-1} [4k^2 + 4k + 1]$$

$$= 4 \sum_{k=0}^m k^2 - 4 \sum_{k=0}^{m-1} k^2 - 4 \sum_{k=0}^{m-1} k - \sum_{k=0}^{m-1} 1$$

$$= 4m^2 - 4 \sum_{k=0}^{m-1} k - \sum_{k=0}^{m-1} 1$$

$$= 4m^2 - 4 \frac{(m-1)m}{2} - m$$

$$= 4m^2 - 2(m-1)m - m$$

$$= 4m^2 - 2m^2 + 2m - m$$

$$= 2m^2 + m$$

$$\sum_{k=0}^{2m} (-1)^k k^2 = 2m^2 + m$$

$$2) \sum_{1 \leq i, j \leq m} \min(i, j) = \sum_{k=1}^m k + \sum_{\substack{1 \leq i < j \leq m \\ 1 \leq j < i \leq m}} \min(i, j)$$

casque $i = j = k$

$$= \sum_{k=1}^m k + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} \min(i, j)$$

$$= \sum_{k=1}^m k + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} i$$

$$= \sum_{k=1}^m k + 2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=i+1}^m i$$

$$= \sum_{k=1}^m k + 2 \sum_{i=1}^m \underbrace{(m - (i+1) + 1)}_{m-i} i$$

$$= \sum_{k=1}^m k + 2m \sum_{i=1}^m i - 2 \sum_{i=1}^m i^2$$

$$= \frac{m(m+1)}{2} + 2m \cdot \frac{m(m+1)}{2} - 2 \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

$$= \frac{m(m+1)(2m+1)}{2} - 2 \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

$$= 3 \frac{m(m+1)(2m+1)}{6} - 2 \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

$$= \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

Exercice 7:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a > b$.

On a:

$$a^n - b^n = \underbrace{(a-b)}_{\geq 1} \sum_{h=0}^{n-1} a^{n-1-h} b^h$$

$$\geq \sum_{h=0}^{n-1} a^{n-1-h} b^h$$

$$a \geq b \quad \downarrow \quad \geq \sum_{h=0}^{n-1} b^{n-1-h} b^h$$

$$= \sum_{h=0}^{n-1} b^{n-1} b^{-h} b^h$$

$$= b^{n-1} \sum_{h=0}^{n-1} 1$$

$$= n b^{n-1},$$

d'où :

$$a^n - b^n \geq n b^{n-1}.$$

2) Soit $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que :

$$x^n + y^n = z^n \quad (*)$$

Sans perte de généralité, on peut supposer $x \leq y$.

D'après (*), on déduit : $z > y$.

De plus, d'après (*), on a :

$$\begin{aligned} x^n &= z^n - y^n \\ &\geq n y^{n-1} \quad \text{d'après 9.1)} \\ &\geq n x^{n-1} \quad \text{car } x \leq y \text{ par hypothèse.} \end{aligned}$$

Or, $x \neq 0$ ($x \in \mathbb{N}^*$), donc :

$$\begin{aligned} x^n &\geq n x^{n-1} \\ \Rightarrow x &= \frac{x^n}{x^{n-1}} \geq n \frac{x^{n-1}}{x^{n-1}}, \end{aligned}$$

i.e. :

$$x \geq n.$$

D'où : $x \geq m$ et $y \geq m$.
↗ Con $y \geq x$

Exercice 8:

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\frac{a}{n} \leq \frac{b}{n+1} = \frac{an + a + bn}{n(n+1)} = \frac{(a+b)n + a}{n(n+1)}$$

$$\Rightarrow a = 1 \text{ et } a + b = 0$$

$$\Rightarrow b = -a = -1$$

$$a = 1 \text{ et } b = -1$$

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, On a :

$$\frac{1}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{(n-1)n} \quad /$$

d'où :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

En sommant ces inégalités, on obtient :

$$\underbrace{\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right)}_{\parallel} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq \underbrace{\sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right)}_{\parallel}$$
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 - \frac{1}{n}$$

D'où, en ajoutant 1,

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

3) Par passage à la limite, on trouve :

$$\frac{3}{2} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2$$

(En fait, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} \dots$)

Exercice 9: Soit E un ensemble et A, B, C des parties de E .

1) On procède par double inclusion.

□ Soit $x \in A \setminus B$.

$$\Rightarrow x \in A \text{ et } x \notin B$$

$$\Rightarrow x \notin \bar{A} \text{ et } x \in \bar{B}$$

$$\Rightarrow x \in \bar{B} \setminus \bar{A}.$$

□ Soit $x \in \bar{B} \setminus \bar{A}$.

$$\Rightarrow x \in \bar{B} \text{ et } x \notin \bar{A}$$

$$\Rightarrow x \notin B \text{ et } x \in A$$

$$\Rightarrow x \in A \setminus B.$$

2) $\Rightarrow$ On suppose $A \cup B = A \cap B$.

Montrons que: $A = B$

□ Soit $x \in A$.

Alors, $x \in A \cup B$. Or, $A \cup B = A \cap B$,

donc $x \in A \cap B$. D'où : $x \in B$.

□. De même en prenant $x \in B$.

On obtient donc $A = B$.

⇐ Supposons $A = B$. Montrons que $A \cup B = A \cap B$.

$$\text{On a : } A \cup B = A \cup A = A$$

$$A \cap B = A \cap A = A$$

Or, comme $A = A$, on obtient :

$$A \cup B = A \cap B.$$

3) ⇒ Supposons $A \cup B = B \cap C$.

Montrons que : $A \subset B \subset C$.

Soit $x \in A$. Alors : $x \in A \cup B$

donc $x \in B \cap C$ et $x \in B$.

Soit $y \in B$. Alors, $y \in A \cup B = B \cap C$
donc $y \in B \cap C$ et $y \in C$.

On a bien montré $A \subset B \subset C$.

$\Leftarrow$ Supposons $A \subset B \subset C$. Montrons
que $A \cup B = B \cap C$.

□. Soit $x \in A \cup B$.

- Si $x \in A$, alors $x \in B \subset C$.

- Si $x \in B \setminus A$, alors $x \in C$.

Dans les 2 cas, $x \in B$ et $x \in C$,
donc $x \in B \cap C$.

□. Soit $x \in B \cap C$. Alors, $x \in B$ et
 $x \in A \cup B$.

On a donc montré :

$$A \cup B = B \cap C.$$

exercice 10: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$
tels que : $\sum_{k=1}^n \alpha_k = n$ et $\sum_{k=1}^n \alpha_k^2 = n$.

On a :

$$\sum_{k=1}^n (\alpha_k - 1)^2 = \sum_{k=1}^n [\alpha_k^2 - 2\alpha_k + 1]$$

$$= \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k + \sum_{k=1}^n 1$$

$$= n - 2n + n$$

$$= 0$$

$$= 0$$

Or, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$(\alpha_k - 1)^2 \geq 0,$$

On en déduit alors :

$$(\alpha_k - 1)^2 = 0, \forall k = 1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \alpha_k - 1 = 0, \forall k = 1, \dots, n.$$

Exercice 11:

A

$$1) \left\{ x \in \mathbb{R} : \exists a \in \mathbb{R}_+^*, \exists b \in \mathbb{R}_-^*, x = a + b \right\} = \mathbb{R}$$

2) Procédons par double inclusion:

⊆ Immédiat par définition de A.

⊇ Soit $x \in \mathbb{R}$,

1^{er} cas: $x > 0$

$$x = \underbrace{(x+1)}_{>0} + \underbrace{(-1)}_{<0} \in A$$

2^e cas: $x < 0$

$$x = \underbrace{(x-1)}_{<0} + \underbrace{1}_{>0} \in A$$

3^e cas: $x = 0$

$$0 = \underbrace{1}_{>0} + \underbrace{(-1)}_{<0} \in A$$

Finalement, $\mathbb{R} \subset A$ et $\mathbb{R} = A$.

exercice 12:

1) On pose, pour tout $n \geq 1$,
 $U_n = k 2^n$.

On a alors :

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= (k+1)2^{n+1} - k 2^n \\ &= k 2^n \times 2 + 2^n \times 2 - k \times 2^n \\ &= (2k + 2 - k) 2^n \\ &= (k+2) 2^n \end{aligned}$$

2) On reconnaît, d'après q. 1), une somme télescopique, d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^m (k+2) 2^n &= \sum_{n=0}^m (U_{n+1} - U_n) = U_{m+1} - U_0 \\ &= (k+1)2^{m+1} - 0 \\ &= (k+1)2^{m+1} \end{aligned}$$

Exercice 13:

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

1) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.

2) $\exists M > 0, \forall A > 0, \exists x \geq A, f(x) \leq M$

3) $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) > 0$ et $x > 0$.

4) $\exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists (x, y) \in \mathbb{I}^2, |x - y| \leq \eta$
et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$

Exercice 14:

Soit $x > -1$. Procédons par récurrence.

Initialisation: $n = 0$

$$(1+x)^0 = 1 \text{ et } 1 + 0 \times x = 1,$$

$$\text{d'où } (1+x)^0 \geq 1 + 0 \times x.$$

H.R (Hérédité: Soit $n \geq 0$ fixé tel que $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
Montrons que l'on a alors $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$.

$$\text{Or a: } (1+x)^{n+1} = (1+x)^n (1+x) \geq (1+nx)(1+x) \quad \left. \vphantom{(1+x)^{n+1}} \right\} \text{ par H.R}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + x + mx + mx^2 \\
 &= 1 + (m+1)x + \underbrace{mx^2}_{\geq 0} \\
 &\geq 1 + (m+1)x
 \end{aligned}$$

Exercice 15:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2} &= \frac{a(k+1) + bk}{k(k+1)} + \frac{c}{k+2} \\
 &= \frac{(ak + b - a)(k+2) + ck(k+1)}{k(k+1)(k+2)} \\
 &= \frac{ak^2 + bk^2 + ak + 2ak + 2b + 2a + ck^2 + ck}{k(k+1)(k+2)} \\
 &= \frac{(a+b+c)k^2 + (3a+2b+c)k + 2a}{k(k+1)(k+2)}
 \end{aligned}$$

Par identification, on trouve :

$$\begin{cases}
 2a = 2 \\
 3a + 2b + c = 0 \\
 a + b + c = 0
 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 1 \text{ et } \begin{cases} 2b + c = -3 \\ b + c = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 1 \text{ et } \begin{cases} 2b - 1 - b = -3 \\ b + c = -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a = 1 \text{ et } \begin{cases} b = -2 \\ c = 1 \end{cases}$$

Finalement, $a = 1, b = -2 \text{ et } c = 1.$

$$\begin{aligned} 2) \sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)(k+2)} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) - \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \end{aligned}$$

Exercice 16:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

$$\bullet \sum_{k=0}^n [(k+1)^4 - k^4] = (n+1)^4 - 0^4 = (n+1)^4$$

$$\bullet (k+1)^4 - k^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1 - k^4 \\ = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^n [(k+1)^4 - k^4] = \sum_{k=0}^n [4k^3 + 6k^2 + 4k + 1]$$

$$= 4 \sum_{k=0}^n k^3 + 6 \sum_{k=0}^n k^2 + 4 \sum_{k=0}^n k + \sum_{k=0}^n 1$$

$$= 4 \sum_{k=0}^n k^3 + n(n+1)(2n+1) + 2n(n+1) + n+1$$

• Ainsi, on obtient :

$$\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{(n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)}{4}$$

$$= \frac{(n+1) [(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1]}{4}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(n+1)(n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - 2n^2 - n - 2n - 1)}{2^2} \\
&= \frac{(n+1)(n^3 + n^2)}{2^2} \\
&= \frac{(n+1)n^2(n+1)}{2^2} \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2
\end{aligned}$$

Exercise 17: Let $x, y \in \mathbb{R}$.

1) $1 > x$ or $x \geq y$

2) $x^2 = 1$ or $x \neq 1$

3) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y \neq 0$

4) $\exists x \in E, \exists x' \in E, x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x')$

$$5) \exists (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2 (A \cap B = \emptyset) \text{ et } (A \neq \emptyset \text{ et } B \neq \emptyset)$$

Exercice 18 :

Initialisation : $n = 2$

$$\sum_{k=1}^2 \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{3 \times 2}{2 \times 2 + 1} = \frac{6}{5}$$

$$= \frac{5}{4}$$

$$\text{et} \quad \frac{5}{4} > \frac{6}{5} : \checkmark$$

H.R. (Hérédité : Soit $n \geq 2$ fixe tel que

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}.$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$> \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

Montrons que : $\frac{3m}{2m+1} - \frac{3m+3}{2m+3} > -\frac{1}{(m+1)^2}$

$$\frac{3m}{2m+1} - \frac{3m+3}{2m+3} = \frac{3m(2m+3) - (3m+3)(2m+1)}{(2m+1)(2m+3)}$$

$$= \frac{\cancel{6m^2} + 9m - \cancel{6m^2} - 3m - 6m - 3}{4m^2 + 8m + 3}$$

$$= \frac{-3}{4m^2 + 8m + 3}$$

Il nous faut alors montrer que :

$$\frac{3}{4m^2 + 8m + 3} < \frac{1}{m^2 + 2m + 1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4m^2 + 8m + 3} < \frac{1}{3m^2 + 6m + 3}$$

$$\text{Or, } 4m^2 + 8m + 3 = \underbrace{(m^2 + 2m)}_{\geq 0} + 3m^2 + 6m + 3.$$

D'où le résultat annoncé.

Exercice 19: Soit $n \geq 0$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} 1) \sum_{k=0}^n a^k 2^{3k} b^{-k} &= \sum_{k=0}^n a^k 8^k b^{-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \left(\frac{8a}{b} \right)^k \\ &= \begin{cases} \frac{1 - \left(\frac{8a}{b} \right)^{n+1}}{1 - \frac{8a}{b}} & \text{si } 8a \neq b \\ n+1 & \text{si } 8a = b \end{cases} \end{aligned}$$

2) même idée que pour le min.
(voir exercice 6)

Exercice 20: $E = \{a, b\}$

$$(a, b) \in E \times E$$

$$(a, \{b\}) \in E \times \mathcal{P}(E)$$

$$(E, a) \in \mathcal{P}(E) \times E$$

$$(\emptyset, \{a\}) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$$

Exercice 21:

1) $\Leftrightarrow$

2) $\Rightarrow$

3) $\Leftarrow$

4) $\Leftrightarrow$

Exercice 22: Soit E, F deux ensembles.

$\Rightarrow$ Immédiat.

$\Leftarrow$ Supposons $P(E) = P(F)$. Montrons que : $E = F$.

• $\square$ Soit $x \in E$. Alors, $\{x\} \in P(E)$.
Or, $P(E) = P(F)$ donc $\{x\} \in P(F)$.
D'où $x \in F$.

Exercício 23:

$$\begin{aligned} 1) \sum_{0 \leq h \leq l \leq n} \frac{h}{l+1} &= \sum_{l=0}^n \sum_{h=0}^l \frac{h}{l+1} \\ &= \sum_{l=0}^n \frac{1}{l+1} \sum_{h=0}^l h \\ &= \sum_{l=0}^n \frac{l(l+1)}{2(l+1)} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{l=0}^n l \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \sum_{\substack{0 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq m}} p(q^2 + 1) &= \sum_{p=0}^n \sum_{q=1}^m p(q^2 + 1) \\ &= \sum_{p=0}^n p \left[\sum_{q=1}^m q^2 + \sum_{q=1}^m 1 \right] \\ &= \left[\sum_{q=1}^m q^2 + \sum_{q=1}^m 1 \right] \sum_{p=0}^n p \\ &= \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + n \right) \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \sum_{\substack{0 \leq j \leq m \\ j \leq i \leq j+p}} (i-j)^2 &= \sum_{j=0}^m \sum_{i=j}^{j+p} (i-j)^2 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} h = i - j \\
 &= \sum_{j=0}^m \sum_{h=0}^p h^2 \\
 &= \sum_{j=0}^m \frac{p(p+1)(2p+1)}{6} \\
 &= (m+1) \times \frac{p(p+1)(2p+1)}{6}
 \end{aligned}$$

Exercice 24: Soit E un ensemble et A, B deux parties de E .

1). Soit $C \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

Alors: $C \in \mathcal{P}(A)$ ou $C \in \mathcal{P}(B)$

$\Leftrightarrow C \subset A$ ou $C \subset B$

$\Rightarrow C \subset A \cup B$

$\Rightarrow C \in \mathcal{P}(A \cup B)$

C Soit $C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Mo: $C \in \mathcal{P}(A \cap B)$.

$C \subset A$ et $C \subset B$

$$\Rightarrow C \subset A \cap B$$

$$\Rightarrow C \in \mathcal{P}(A \cap B)$$

$$\text{D'où } \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cap B).$$

$$\boxed{\supset} \text{ Soit } C \in \mathcal{P}(A \cap B). \underline{\text{Mq:}} C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

$$C \subset A \cap B$$

$$\Rightarrow C \subset A \text{ et } C \subset B$$

$$\Rightarrow C \in \mathcal{P}(A) \text{ et } C \in \mathcal{P}(B)$$

$$\Rightarrow C \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

D'où :

$$\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$$

Finalement,

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B).$$

2) Montrons que :

$$(\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)) \Leftrightarrow (A \subset B \text{ ou } B \subset A)$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Immédiat

$\Rightarrow$ Supposons que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$.
Montrons que: $A \subset B$ ou $B \subset A$

$$A \cup B \in \mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$$

$$\Rightarrow A \cup B \in \mathcal{P}(A) \text{ ou } A \cup B \in \mathcal{P}(B)$$

$$\Rightarrow A \cup B \subset A \text{ ou } A \cup B \subset B$$

$$\Rightarrow B \subset A \text{ ou } A \subset B.$$