

Questions de cours

1. Énoncer les lois de Morgan.
2. Quelle est la différence entre $\forall x, \exists y$ et $\exists x, \forall y$?
3. Soit P et Q deux assertions mathématiques. Quelle est la négation et la contraposée de $P \implies Q$?
4. Soient P_1 et P_2 deux assertions mathématiques. Donner trois manières de démontrer que l'implication $P_1 \implies P_2$.
5. Soit $A \subset B$. Que dire $A \cup B$ et $A \cap B$?
6. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I . Écrire la négation de la propriété "f est positive sur I".

Exercices

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la pyramide suivante constituée des entiers impairs (les nombres A_n et B_n désignent respectivement le premier et le dernier entier de la n -ième ligne) :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & 3 & & 5 & & \\
 & & 7 & & 9 & & 11 & & \\
 & 13 & & 15 & & 17 & & 19 & \\
 A_n & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & B_n
 \end{array}$$

1. Déterminer, en fonction de n , le nombre N_n d'entiers impairs dans cette pyramide.
2. Déterminer B_n et A_n en fonction de n .
3. Déterminer la somme des nombres de la n -ième ligne.
4. Retrouver ainsi l'expression de la troisième somme d'Euler

$$E_3(n) = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3.$$

Exercice 2

1. Montrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
2. En déduire que lorsqu'un nombre réel peut être écrit sous la forme $a + b\sqrt{2}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, alors cette écriture est unique.

Exercice 3

1. Démontrer que si vous rangez $(n+1)$ paires de chaussettes dans n tiroirs distincts, alors il y a au moins un tiroir contenant au moins 2 paires de chaussettes.
2. Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On se donne $n+1$ réels $x_0, x_1, \dots, x_n$ de $[0, 1]$ vérifiant

$$0 \leq x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n \leq 1.$$

Montrer qu'il y a deux de ces réels dont la distance est inférieure ou égale à $1/n$.

Exercice 4

Soit $n \geq 1$. Calculer le produit $P_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} ij$.

Exercice 5

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. f est constante ;
2. f n'est pas constante ;
3. f s'annule ;
4. f est périodique.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

- $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k^2 ;$
- $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \min\{i, j\}.$

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Soient $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $a > b$. Démontrer que

$$a^n - b^n \geq n b^{n-1}.$$

- En déduire que si $(x, y, z) \in \mathbb{N}^{*3}$ est une solution de l'équation de Fermat

$$x^n + y^n = z^n,$$

alors $x \geq n$ et $y \geq n$.

Exercice 8

- Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Déterminer deux réels a et b tels que :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}.$$

- En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

- (Bonus)** Donner alors un encadrement de $\zeta(2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$

Exercice 9

Soit E un ensemble et A, B, C des parties de E . Montrer les égalités :

- $A \setminus B = \overline{B} \setminus \overline{A}.$
- $(A \cap B = A \cup B) \iff (A = B)$
- $(A \cup B = B \cap C) \iff (A \subset B \subset C).$

Exercice 10

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et n réels $x_1, \dots, x_n$ vérifiant

$$\sum_{k=1}^n x_k = n \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n x_k^2 = n.$$

Démontrer que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, on a $x_k = 1$.

Exercice 11

On souhaite démontrer que tout nombre réel est somme d'un réel strictement positif et d'un réel strictement négatif.

- Reformuler ce résultat sous forme d'une égalité entre ensembles.
- Démontrer le résultat.

Exercice 12

- Déterminer une suite (u_k) telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{k+1} - u_k = (k+2)2^k.$$

- En déduire la valeur de $\sum_{k=0}^n (k+2)2^k.$

Exercice 13

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.
2. $\forall M > 0, \exists A > 0, \forall x \geq A, f(x) > M$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0$.
4. $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2, (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon)$.

Exercice 14

Montrer que pour tout entier naturel n et pour tout réel $x > -1$, on a l'inégalité

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

On tâchera de bien dégager et justifier la stratégie de la preuve.

Exercice 15

1. Déterminer trois réels a, b et c tels que :

$$\frac{2}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$

2. Calculer la somme

$$\sum_{k=1}^n \frac{2}{k(k+1)(k+2)}.$$

Exercice 16

Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant de deux manières la somme $\sum_{k=0}^n [(k+1)^4 - k^4]$, retrouver l'expression de la troisième somme d'Euler

$$E_3(n) = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3.$$

Exercice 17

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Écrire les négations des propositions suivantes :

1. $1 \leq x < y$,
2. $(x^2 = 1) \Rightarrow x = 1$,
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y = 0$,
4. $\forall x \in E, \forall x' \in E, (x \neq x') \Rightarrow f(x) \neq f(x')$,
5. $\forall (A, B) \in \mathcal{P}(E)^2, (A \cap B = \emptyset) \Rightarrow (A = \emptyset \text{ ou } B = \emptyset)$.

Exercice 18

Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} > \frac{3n}{2n+1}.$$

Exercice 19

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $b \neq 0$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=0}^n a^k 2^{3k} b^{-k}$;
2. $\sum_{1 \leq i, j \leq n} \max\{i, j\}$.

Exercice 20

Soit $E = \{a, b\}$. À quels ensembles appartiennent les couples suivants :

$$(a, b), \quad (a, \{b\}), \quad (E, a) \quad \text{et} \quad (\emptyset, \{a\}) ?$$

Exercice 21

Les lettres $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ désignant des propriétés dépendant d'un paramètre x , compléter à l'aide des symboles $\Leftarrow$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ les propriétés mathématiques suivantes :

$$(\forall x \in E, \mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{Q}(x)) \dots (\forall x \in E, \mathcal{P}(x)) \text{ et } (\forall x \in E, \mathcal{Q}(x)),$$

$$(\exists x \in E, \mathcal{P}(x) \text{ et } \mathcal{Q}(x)) \dots (\exists x \in E, \mathcal{P}(x)) \text{ et } (\exists x \in E, \mathcal{Q}(x)),$$

$$(\forall x \in E, \mathcal{P}(x) \text{ ou } \mathcal{Q}(x)) \dots (\forall x \in E, \mathcal{P}(x)) \text{ ou } (\forall x \in E, \mathcal{Q}(x)),$$

$$(\exists x \in E, \mathcal{P}(x) \text{ ou } \mathcal{Q}(x)) \dots (\exists x \in E, \mathcal{P}(x)) \text{ ou } (\exists x \in E, \mathcal{Q}(x)).$$

Exercice 22

Soient E et F deux ensembles. Démontrer que

$$E = F \quad \text{si, et seulement si,} \quad \mathcal{P}(E) = \mathcal{P}(F).$$

Exercice 23

Calculer les sommes suivantes :

$$1. \sum_{0 \leq k \leq \ell \leq n} \frac{k}{\ell + 1};$$

$$2. \sum_{\substack{0 \leq p \leq n \\ 1 \leq q \leq m}} p(q^2 + 1);$$

$$3. \sum_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \leq i \leq j+p}} (i - j)^2.$$

Exercice 24

Soient E un ensemble et A, B deux parties de E .

1. Démontrer que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$.
2. Démontrer que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)$ si, et seulement si, $A \subset B$ ou $B \subset A$.