

Questions de cours

1. Donner les équivalents de :

$$\tan u_n, \quad \sin u_n, \quad \cos u_n - 1, \quad \ln(1 + u_n), \quad e^{u_n} - 1, \quad (1 + u_n)^\alpha - 1.$$

2. Loi Uniforme
3. Énoncer puis démontrer le critère spécial des séries alternées.
4. Loi de Poisson

Exercices

Exercice 1

Soit (u_n) une suite de réels telle que $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier l'existence et la bonne définition d'une telle suite.
2. Montrer que (u_n) converge.
3. En déduire un développement asymptotique à deux termes de u_n .

Exercice 2

Montrer que la suite $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} - \frac{1}{2} \ln^2 n$ converge.

Exercice 3

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge. On note l sa limite.
2. Préciser le signe de l .
3. Montrer que $l = (1 + \sqrt{2}) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} < +\infty$.

Exercice 4

Soit (u_n) une suite réelle décroissante de limite nulle. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(nu_n)_n$ tend vers 0.

Exercice 5

Précisez la nature des séries suivantes :

1. $\sum (-1)^n \left(e - \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right) ;$
2. $\sum \sin \sqrt{1 + n^2 \pi^2}.$

Exercice 6

On définit la suite (u_n) par $u_1 > 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{e^{-u_n}}{n}.$$

1. Montrer que (u_n) converge.
2. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$?
3. Montrer que

$$u_n = \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

avec une constante a à déterminer.

4. Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} (-1)^n u_n$?

Exercice 7

Soit $(a_n)_n$ une suite de réels strictement positifs qui décroît vers 0. Étudier la nature de la série

$$\sum \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n}.$$

Exercice 8

Justifier que la série suivante converge et calculer sa somme :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)}.$$

Exercice 9

Soit (x_n) une suite de réels telle que $x_n^n + x_n - 1 = 0$ pour tout $n \geq 2$.

1. Justifier l'existence et la bonne définition d'une telle suite.
2. Montrer que (x_n) converge.
3. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{\ln(n)}{n} \right)^n = 1.$$

4. En déduire qu'à partir d'un certain rang

$$1 - \frac{\ln(n)}{n} < x_n < 1.$$

Exercice 10

Soit (u_n) une suite réelle vérifiant $u_{n+m} \leq u_n + u_m$ pour tout couple (m, n) d'entiers naturels. On pose

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_{1 \leq k \leq n} \frac{u_k}{k}.$$

1. Justifier que $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et que l est bien défini.
2. On suppose dans cette question que $l \in \mathbb{R}$.
 - (a) Montrer que $u_{mn} \leq mu_n$ pour tout $m, n \geq 1$.
 - (b) Montrer que $\frac{u_n}{n}$ converge vers l . *Indication : on pourra effectuer la division euclidienne de n par m ...*
3. Un *chemin auto-évitant* de longueur n est par définition une suite $X_0, X_1, \dots, X_n$ de points à coordonnées entières du plan tels que X_0 est l'origine, la distance entre X_i et X_{i+1} vaut 1 pour tout $0 \leq i \leq n-1$, et tels que $X_i \neq X_j$ dès que $i \neq j$. Soit c_n le nombre de chemins auto-évitants de longueur n . Montrer que $c_n^{1/n}$ converge lorsque $n \rightarrow \infty$.