

Exercices

Exercice 1

Pour tout $x \geq 1$, on définit :

$$\pi(x) = \text{Card}\{p \text{ premier inférieur ou égal à } x\}.$$

Le très célèbre Théorème des Nombres Premiers affirme alors que :

$$\pi(x) \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{\ln x}.$$

On considère la suite (p_n) des nombres premiers.

1. Que vaut $\pi(p_n)$?
2. En déduire la nature de la série

$$\sum \frac{1}{p_n}.$$

3. **(Bonus)** Retrouver le résultat de la question précédente sans utiliser le TNP et en considérant la série de terme général $-\ln\left(1 - \frac{1}{p_n}\right)$.

Exercice 2

Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs qui décroît vers 0. Étudier la nature de la série

$$\sum \frac{a_n - a_{n+1}}{a_n}.$$

Exercice 3

On considère une suite récurrente telle que $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n \cos u_n$.

1. Étudier la suite (u_n) .
2. Déterminer la nature des séries $\sum (-1)^n u_n$ et $\sum \ln(\cos u_n)$.
3. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 4

Soit (u_n) une suite strictement croissante d'entiers naturels non nuls. Étudier la nature de la série

$$\sum \frac{1}{\text{ppcm}(u_0, u_1, \dots, u_n)}.$$

Exercice 5

Soit (u_n) une suite réelle décroissante de limite nulle. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (nu_n) tend vers 0.

Exercice 6

Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) converge. On note l sa limite.
2. Préciser le signe de l .
3. Montrer que $l = (1 + \sqrt{2}) \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} < +\infty$.

Exercice 7

1. Pour $n \geq 3$, montrer que l'équation $x^n e^{-x} = 1$ admet une unique solution dans $[0, n]$, que l'on notera x_n .
2. Montrer que la suite (x_n) converge et préciser sa limite l .
3. Déterminer un développement asymptotique à trois termes de x_n .

Exercice 8

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note τ_n le nombre de diviseurs positifs de n . Pour tout $x \geq 1$, on pose

$$F(x) = \sum_{1 \leq n \leq x} \tau_n.$$

Déterminer un équivalent simple de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 9

Soit (u_n) une suite de réels telle que $u_n^n + u_n^{n-1} + \dots + u_n - 1 = 0$ pour tout $n \geq 1$.

1. Justifier l'existence et la bonne définition d'une telle suite.
2. Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite l .
3. En déduire un équivalent de $u_n - l$.

Exercice 10

Soit (a_n) une suite positive et (u_n) la suite définie par la donnée de $u_0 > 0$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}.$$

Démontrer que la suite (u_n) converge si, et seulement si, la série $\sum a_n$ converge.

Exercice 11

Étudier la convergence de la série $\sum \sin \left(\pi \left(2 + \sqrt{3} \right)^n \right)$.

Exercice 12

Préciser la nature des séries suivantes :

1. $\sum \left(\pi^{3/5} - (2 \arctan n)^{3/5} \right)$;
2. $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$.

On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$