

Khôlle de Mathématiques

Préparée par : **Hamza BOUKHRISS**

Date : 22 septembre 2025

Questions de cours

Question de cours 1

Soit a et b deux nombres réels. Montrer que

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |b - a|}{2}, \quad \min(a, b) = \frac{a + b - |b - a|}{2}.$$

Question de cours 2

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$$

et que $f : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.

Question de cours 3

Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 5$,

$$n! \geq 2^{n+1}.$$

Question de cours 4

Montrer que $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.

Question de cours 5

Montrer que n^2 est pair si, et seulement si, n est pair.

Question de cours 6

Montrer que l'équation

$$9x^5 - 12x^4 + 6x - 5 = 0$$

n'admet pas de solution entière.

Question de cours 7

Montrer que

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Question de cours 8

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$x - 1 \leq \sqrt{x + 2}.$$

Exercices

Exercice 1

On considère la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$v_0 = 1, \quad v_1 = 3, \quad v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n \quad \text{pour tout } n \geq 0.$$

Montrer que pour tout entier $n \geq 0$:

$$v_n = 2^n \left(1 + \frac{n}{2}\right).$$

Solution

On procède par récurrence sur n .

Initialisation : Pour $n = 0$:

$$v_0 = 1 = 2^0 \left(1 + \frac{0}{2}\right),$$

et pour $n = 1$:

$$v_1 = 3 = 2^1 \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3.$$

Donc la propriété est vraie aux deux premiers rangs.

Hérédité : Supposons que pour un certain $n \geq 0$,

$$v_n = 2^n \left(1 + \frac{n}{2}\right), \quad v_{n+1} = 2^{n+1} \left(1 + \frac{n+1}{2}\right).$$

Alors :

$$v_{n+2} = 4v_{n+1} - 4v_n = 4 \cdot 2^{n+1} \left(1 + \frac{n+1}{2}\right) - 4 \cdot 2^n \left(1 + \frac{n}{2}\right).$$

On met 2^n en facteur :

$$v_{n+2} = 2^n \left[4 \cdot 2 \left(1 + \frac{n+1}{2}\right) - 4 \left(1 + \frac{n}{2}\right)\right] = 2^n \left[8 \cdot \frac{n+3}{2} - 4 \cdot \frac{n+2}{2}\right].$$

En simplifiant :

$$v_{n+2} = 2^n [4(n+3) - 2(n+2)] = 2^n(2n+8) = 2^{n+2} \left(1 + \frac{n+2}{2}\right).$$

Ainsi, v_{n+2} satisfait la formule, et par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

Exercice 2

On définit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ par :

$$u_0 = 1, \quad u_{n+1} = 1 + \sum_{k=0}^n u_k$$

Montrer par récurrence forte que pour tout $n > 1$:

$$u_n = 2^n - 1.$$

Solution

On définit la propriété $P(n) : u_n = 2^n - 1$.

Initialisation :

$$u_1 = 1 + u_0 = 2 = 2^1 - 1$$

Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $P(k)$ est vraie pour tout $1 \leq k \leq n$. Alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 1 + \sum_{k=0}^n u_k = 1 + u_0 + \sum_{k=1}^n (2^k - 1) = 1 + 1 + (2^1 + 2^2 + \dots + 2^n - n) \\ &= 2 + (2^{n+1} - 2) - n = 2^{n+1} - 1 \end{aligned}$$

Ainsi $P(n+1)$ est vraie et, par récurrence forte, la formule est vraie pour tout $n > 1$.

Remarque : La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 2 à partir du rang 1.

Exercice 3

Montrer que pour tout entier $n \geq 0$:

$$\sum_{k=0}^n k! \leq (n+1)!.$$

Solution

On procède par récurrence sur n .

Initialisation : Pour $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^0 k! = 0! = 1 \leq 1! = 1$$

Donc la propriété est vraie pour $n = 0$.

Hérédité : Supposons que $\sum_{k=0}^n k! \leq (n+1)!$ pour un certain $n \geq 0$. Alors pour $n+1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k! = \sum_{k=0}^n k! + (n+1)! \leq (n+1)! + (n+1)! = 2 \cdot (n+1)!$$

Or $2 \cdot (n+1)! \leq (n+2)!$ pour tout $n \geq 1$ car $(n+2)! = (n+2)(n+1)! \geq 2(n+1)!$.

Donc par récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

Exercice 4

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 3, \quad u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}.$$

Montrer que pour tout entier $n \geq 0$:

$$u_n = \frac{2 \cdot 3^n - 2^{n-1}}{3^n - 2^{n-1}}.$$

Solution

On définit la propriété $P(n) : u_n = \frac{2 \cdot 3^n - 2^{n-1}}{3^n - 2^{n-1}}$.

Initialisation : Pour $n = 0$:

$$u_0 = 3 = \frac{2 \cdot 3^0 - 2^{-1}}{3^0 - 2^{-1}} = \frac{2 - 1/2}{1 - 1/2} = \frac{3/2}{1/2} = 3.$$

Donc $P(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \geq 0$, c'est-à-dire :

$$u_n = \frac{2 \cdot 3^n - 2^{n-1}}{3^n - 2^{n-1}}.$$

Alors :

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1} = \frac{4 \frac{2 \cdot 3^n - 2^{n-1}}{3^n - 2^{n-1}} - 2}{\frac{2 \cdot 3^n - 2^{n-1}}{3^n - 2^{n-1}} + 1}.$$

En simplifiant numérateur et dénominateur :

$$u_{n+1} = \frac{4(2 \cdot 3^n - 2^{n-1}) - 2(3^n - 2^{n-1})}{(2 \cdot 3^n - 2^{n-1}) + (3^n - 2^{n-1})} = \frac{6 \cdot 3^n - 2^n}{3^{n+1} - 2^n} = \frac{2 \cdot 3^{n+1} - 2^n}{3^{n+1} - 2^n}.$$

Donc $P(n+1)$ est vraie et, par récurrence, la formule est vraie pour tout $n \geq 0$.

Exercice 5

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 4, \quad u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \text{ pour tout } n \geq 0.$$

1. Montrer que pour tout $n \geq 0 : u_n = 3n + 1$.
2. En écrivant que $u_{k+1} - u_k = u_k - u_{k-1}$ et en sommant ces égalités pour $k \in [1, n]$ et $n > 1$, retrouver l'expression précédente.

Solution

1. Par récurrence double : On pose $P(n) : u_n = 3n + 1$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 1 = 3 \cdot 0 + 1$. Pour $n = 1$, $u_1 = 4 = 3 \cdot 1 + 1$.

Hérédité : On suppose que $P(n)$ et $P(n + 1)$ sont vraies :

$$u_n = 3n + 1, \quad u_{n+1} = 3(n + 1) + 1.$$

Alors par définition de la suite :

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n = 2(3(n + 1) + 1) - (3n + 1) = 3(n + 2) + 1.$$

Donc $P(n + 2)$ est vraie.

Ainsi, par récurrence double, la formule est vraie pour tout $n \geq 0$.

2. Par sommation : On écrit pour $k \in [1, n]$:

$$u_{k+1} - u_k = u_k - u_{k-1}.$$

En sommant de $k = 1$ à n , on obtient :

$$\sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=1}^n (u_k - u_{k-1}) \implies u_{n+1} - u_1 = u_n - u_0.$$

Donc pour $n > 1$:

$$u_{n+1} - u_n = u_1 - u_0 = 3,$$

et on retrouve que $(u_n)_{n \geq 0}$ est bien une suite arithmétique de raison 3.

Exercice 6

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$u_1 = 1, \quad u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n u_k \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_n = 2n - 1.$$

Solution

On procède par récurrence forte.

Initialisation : Pour $n = 1$:

$$u_1 = 1 = 2 \cdot 1 - 1.$$

Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $P(1), \dots, P(n)$ sont vraies pour un certain $n \geq 1$, c'est-à-dire :

$$u_k = 2k - 1 \quad \text{pour tout } k = 1, \dots, n.$$

Alors, par définition de la suite :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n u_k = (2n - 1) + \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^n (2k - 1).$$

Calculons la somme :

$$\sum_{k=1}^n (2k - 1) = 2 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n 1 = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} - n = n(n+1) - n = n^2.$$

Donc :

$$u_{n+1} = (2n - 1) + \frac{2}{n^2} \cdot n^2 = 2n - 1 + 2 = 2(n + 1) - 1.$$

Ainsi, $P(n + 1)$ est vraie et par récurrence forte, la formule est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\lfloor \sqrt{x+1} \rfloor = 2.$$

Solution

On sait que pour tout réel y , $\lfloor y \rfloor = 2 \iff 2 \leq y < 3$.

Ici, on pose $y = \sqrt{x+1}$. Donc :

$$2 \leq \sqrt{x+1} < 3.$$

En élevant au carré :

$$2^2 \leq x+1 < 3^2 \implies 4 \leq x+1 < 9.$$

En soustrayant 1 :

$$3 \leq x < 8.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$x \in [3, 8[.$$

Exercice 8

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \rfloor = 4n + 1.$$

Solution

Posons

$$x = (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 = n + (n+1) + 2\sqrt{n(n+1)} = 2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)}.$$

On veut montrer que $\lfloor x \rfloor = 4n + 1$.

Borne inférieure : On veut vérifier que $4n + 1 \leq x$, soit :

$$2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)} \geq 4n + 1 \implies \sqrt{n(n+1)} \geq n.$$

En élevant au carré :

$$n(n+1) \geq n^2 \implies n \geq 0,$$

ce qui est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Borne supérieure : On veut vérifier que $x < 4n + 2$, soit :

$$2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)} < 4n + 2 \implies \sqrt{n(n+1)} < n + \frac{1}{2}.$$

En élevant au carré :

$$n(n+1) < \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \implies n^2 + n < n^2 + n + \frac{1}{4},$$

ce qui est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi :

$$4n + 1 \leq x < 4n + 2 \implies \lfloor x \rfloor = 4n + 1.$$