

Khôlle de Mathématiques

Préparée par : **Hamza BOUKHRISS**

Date : 29 septembre 2025

Questions de cours

Question de cours 1

Soit a et b deux nombres réels. On a alors :

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |b - a|}{2}, \quad \min(a, b) = \frac{a + b - |b - a|}{2}.$$

On fera preuve de rigueur sur les éventuelles disjonctions de cas.

Question de cours 2

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$$

puis en déduire que $f : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique. L'interrogateur pourra aussi demander de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$. Une idée de preuve à l'oral pour $n \in \mathbb{Z}$ peut être demandée.

Question de cours 3

On considère $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Montrer que

$$f^{-1}([1; 4]) = [-2; -1] \cup [1; 2].$$

Question de cours 4

Soit E, F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application et $B_1, B_2 \subset F$. Alors

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2), \quad f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

Question de cours 5

Soit E, F, G trois ensembles, $f \in F^E$ et $g \in G^F$. Montrer que si f et g sont injectives (ou surjectives), alors $g \circ f$ est injective (ou surjective).

Question de cours 6

Soit E, F deux ensembles, $f \in F^E$ et $g \in E^F$ deux applications telles que

$$f \circ g = \text{Id}_F \quad \text{et} \quad g \circ f = \text{Id}_E.$$

Montrer que f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Question de cours 7

Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 4\}$ et $F = \{(4t + 2, 2t - 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $E = F$.

Question de cours 8

Soit E un ensemble. Pour tout sous-ensemble $A \subset E$, on note 1_A la fonction indicatrice de A . Soit $A, B \subset E$.

1. Montrer que $A = B \iff 1_A = 1_B$.
2. Montrer que $1_{A \cap B} = 1_A \times 1_B$.
3. Montrer que $1_{\bar{A}} = 1 - 1_A$.

Question de cours 9

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation :

$$x - 1 \leq \sqrt{x + 2}.$$

Exercices

Exercice 1

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 3x - y + z \\ 2x + z \end{pmatrix}.$$

Est-elle injective, surjective, bijective ? Déterminer $\text{Im } f$.

Solution

Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Im } f$. On cherche le nombre de solutions de

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire du système :

$$\begin{cases} x + y + z = a & (1) \\ 3x - y + z = b & (2) \\ 2x + z = c & (3) \end{cases}$$

Étude de compatibilité du système :

- En combinant (1) et (2) : $(2) - 3 \times (1)$ donne $-4y - 2z = b - 3a \Rightarrow -2y - z = \frac{b-3a}{2}$ (2').
- En combinant (3) et (1) : $(3) - 2 \times (1)$ donne $-2y - z = c - 2a$ (3').

Pour que le système ait une solution, il faut

$$\frac{b-3a}{2} = c - 2a \iff a + b - 2c = 0.$$

Conséquences :

- Si $a + b - 2c \neq 0$, alors le système n'a pas de solution. Donc f n'est pas surjective (par exemple $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'a pas d'antécédent si la condition n'est pas satisfaite).
- Si $a + b - 2c = 0$, alors le système a une infinité de solutions (on peut exprimer x et y en fonction de z libre). Donc f n'est pas injective (par exemple $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a plusieurs antécédents).

Image :

Ainsi,

$$\text{Im } f = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid a + b - 2c = 0 \right\}.$$

Conclusion :

L'application f n'est ni injective, ni surjective, donc elle n'est pas bijective. Son image est le sous-espace plan de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $a + b - 2c = 0$.

Exercice 2

Montrer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = e^x - e^{-x} + 1$$

est une bijection, et calculer $f^{-1}(y)$ pour $y \in \mathbb{R}$.

Solution

Soit $y \in \mathbb{R}$. On résout l'équation

$$y = f(x) = e^x - e^{-x} + 1.$$

On pose $X = e^x > 0$. Alors :

$$y = X - \frac{1}{X} + 1 \iff X^2 + (1 - y)X - 1 = 0.$$

Le discriminant est

$$\Delta = (1 - y)^2 + 4 > 0.$$

Les deux racines sont

$$X = \frac{y - 1 \pm \sqrt{(1 - y)^2 + 4}}{2}.$$

Le produit des racines vaut $-1 < 0$, donc l'une des racines est strictement positive et l'autre strictement négative. Comme $X = e^x > 0$, seule la racine positive est retenue :

$$X = \frac{y - 1 + \sqrt{(1 - y)^2 + 4}}{2}.$$

Ainsi

$$x = \ln \left(\frac{y - 1 + \sqrt{(1 - y)^2 + 4}}{2} \right).$$

On a donc montré que pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique x tel que $f(x) = y$.

Conclusion : f est bijective, et

$$f^{-1}(y) = \ln \left(\frac{y - 1 + \sqrt{(1 - y)^2 + 4}}{2} \right).$$

Exercice 3

Soit $m \in \mathbb{R}$. On définit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + my \\ y + mx \end{pmatrix}.$$

1. Discuter l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f en fonction de m .
2. Pour $m = -1$, préciser $\text{Im}(f)$.
3. Pour $m = 1$, donner l'expression de f^{-1} .

Solution**1. Injectivité, surjectivité et bijectivité :**

Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. On cherche les éventuels antécédents en résolvant le système :

$$(S) \quad \begin{cases} x + my = a \\ y + mx = b \end{cases}.$$

- Si $m^2 \neq 1$, le système admet une unique solution pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Donc f est injective et surjective, donc bijective.

- Si $m = 0$ ou $m = -1$, alors selon (a, b) : - Si $b - ma \neq 0$, le système n'a pas de solution f n'est pas surjective. - Si $b - ma = 0$, le système a une infinité de solutions f n'est pas injective. Donc f n'est pas bijective.

On peut réécrire (S) sous la forme :

$$y(m^2 - 1) = b - ma, \quad x = a - my.$$

2. Cas $m = -1$:

Le système devient

$$\begin{cases} x - y = a \\ y - x = b \end{cases} \iff a + b = 0.$$

Donc

$$\text{Im}(f) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a + b = 0\}.$$

3. Cas $m = 1$:

Le système devient

$$\begin{cases} x + y = a \\ y + x = b \end{cases} \iff a = b,$$

et on peut exprimer la solution en fonction de a :

$$x = \frac{a - b}{2}, \quad y = \frac{a + b}{2}.$$

Ainsi, pour $m = 1$:

$$f^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a - b}{2} \\ \frac{a + b}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Étudier l'injectivité et la surjectivité de f .

Solution**1. Surjectivité :**

Pour tout $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x + y = b \end{cases}.$$

Si $a < 0$, il n'existe aucun (x, y) tel que $x^2 + y^2 = a$. Par exemple, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \text{Im}(f)$. Donc f n'est pas surjective.

2. Injectivité :

Supposons que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ait au moins un antécédent (x, y) . On a alors

$$x^2 + y^2 = a, \quad x + y = b \implies y = b - x.$$

En remplaçant dans la première équation :

$$x^2 + (b - x)^2 = a \implies 2x^2 - 2bx + b^2 - a = 0.$$

Le discriminant de ce polynôme quadratique est

$$\Delta = (-2b)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (b^2 - a) = 8a - 4b^2.$$

En général, il y a deux solutions pour x , donc deux valeurs pour $y = b - x$. Par exemple, pour $b = 0$ et $a = 2$:

$$2x^2 - 0 + 0 - 2 = 0 \implies x = \pm 1, \quad y = -x \implies (1, -1), (-1, 1)$$

donc un élément a deux antécédents.

Conclusion : f n'est ni injective, ni surjective.

Exercice 5

Soit $E = [1, 6]$ et $A = \{2, 4, 6\}$. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E (c'est-à-dire $B \in \mathcal{P}(E) \iff B \subset E$). On définit $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ par

$$f(B) = A \cap B.$$

1. Quels sont les antécédents de $\emptyset$? L'ensemble E est-il dans l'image de f ?
2. Que peut-on dire de l'injectivité et de la surjectivité de f ?
3. Quel est l'espace image de f ?

Solution**1. Antécédents de $\emptyset$ et image :**

On a

$$f(B) = \emptyset \iff A \cap B = \emptyset,$$

c'est-à-dire que B ne contient aucun élément de A . Les antécédents de $\emptyset$ sont donc les parties de E ne contenant aucun élément de A , c'est-à-dire les parties de $\{1, 3, 5\}$. On peut les lister :

$$\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}.$$

On ne peut pas avoir $E \in \text{Im}(f)$, sinon il existerait $B \subset E$ tel que $A \cap B = E$, ce qui est impossible car $A \cap B \subset A \neq E$.

2. Injectivité et surjectivité :

D'après ce qui précède, $\emptyset$ a plusieurs antécédents, donc f n'est pas injective. De plus, $E \notin \text{Im}(f)$, donc f n'est pas surjective.

Ainsi f n'est ni injective, ni surjective.

3. Image de f :

Pour tout $B \subset E$, $f(B) \subset A$, donc $\text{Im}(f) \subset \mathcal{P}(A)$.

Réciproquement, si $C \subset A$, alors $f(A \setminus C) = C$, donc $C \in \text{Im}(f)$.

Ainsi

$$\text{Im}(f) = \mathcal{P}(A).$$

Exercice 6

Soit

$$f : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[\quad \text{définie par} \quad f(x) = \frac{x}{1 + |x|},$$

et

$$g :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R} \quad \text{définie par} \quad g(y) = \frac{y}{1 - |y|}.$$

1. Montrer que f prend ses valeurs dans $] - 1, 1[$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, déterminer $g(f(x))$, puis montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $] - 1, 1[$. Déterminer f^{-1} .

Solution**1. Valeurs de f :**

On veut montrer que $-1 < f(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par définition :

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}.$$

- On observe que $1 + |x| > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. - Pour $x \geq 0$, $|x| = x$ et donc

$$f(x) = \frac{x}{1 + x}.$$

Comme $0 \leq x < \infty$, on a $0 \leq f(x) < 1$.

- Pour $x < 0$, $|x| = -x$ et donc

$$f(x) = \frac{x}{1 - x}.$$

Ici $x < 0$, donc le dénominateur $1 - x > 1 > 0$, et le numérateur $x < 0$. Donc $f(x) \in]-1, 0[$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-1 < f(x) < 1 \implies f(\mathbb{R}) \subset]-1, 1[.$$

2. Vérification de la bijectivité :

Pour $x \in \mathbb{R}$, calculons

$$g(f(x)) = \frac{f(x)}{1 - |f(x)|}.$$

- Si $x \geq 0$, $f(x) = \frac{x}{1+x} \geq 0$ et $|f(x)| = f(x)$. Alors :

$$g(f(x)) = \frac{\frac{x}{1+x}}{1 - \frac{x}{1+x}} = \frac{\frac{x}{1+x}}{\frac{1}{1+x}} = x.$$

- Si $x < 0$, $f(x) = \frac{x}{1-x} < 0$ et $|f(x)| = -f(x)$. Alors :

$$g(f(x)) = \frac{\frac{x}{1-x}}{1 - (-\frac{x}{1-x})} = \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{1}{1-x}} = x.$$

Donc dans tous les cas, $g(f(x)) = x$.

Réciproquement, pour $y \in]-1, 1[$:

$$f(g(y)) = \frac{g(y)}{1 + |g(y)|} = \frac{\frac{y}{1-|y|}}{1 + \frac{|y|}{1-|y|}} = \frac{\frac{y}{1-|y|}}{\frac{1}{1-|y|}} = y.$$

Ainsi

$$g \circ f = \text{Id}_{\mathbb{R}} \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{Id}_{]-1,1[}.$$

Conclusion : f et g sont bijectives, et

$$f^{-1} = g :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \frac{y}{1 - |y|}.$$

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\lfloor \sqrt{x+1} \rfloor = 2.$$

Solution

On sait que pour tout réel y , $\lfloor y \rfloor = 2 \iff 2 \leq y < 3$.

Ici, on pose $y = \sqrt{x+1}$. Donc :

$$2 \leq \sqrt{x+1} < 3.$$

En élevant au carré :

$$2^2 \leq x+1 < 3^2 \implies 4 \leq x+1 < 9.$$

En soustrayant 1 :

$$3 \leq x < 8.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$x \in [3, 8[.$$

Exercice 8

Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \rfloor = 4n + 1.$$

Solution

Posons

$$x = (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 = n + (n+1) + 2\sqrt{n(n+1)} = 2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)}.$$

On veut montrer que $\lfloor x \rfloor = 4n + 1$.

Borne inférieure : On veut vérifier que $4n + 1 \leq x$, soit :

$$2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)} \geq 4n + 1 \implies \sqrt{n(n+1)} \geq n.$$

En élevant au carré :

$$n(n+1) \geq n^2 \implies n \geq 0,$$

ce qui est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Borne supérieure : On veut vérifier que $x < 4n + 2$, soit :

$$2n + 1 + 2\sqrt{n(n+1)} < 4n + 2 \implies \sqrt{n(n+1)} < n + \frac{1}{2}.$$

En élevant au carré :

$$n(n+1) < \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \implies n^2 + n < n^2 + n + \frac{1}{4},$$

ce qui est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi :

$$4n + 1 \leq x < 4n + 2 \implies \lfloor x \rfloor = 4n + 1.$$