

Khôlle de Mathématiques

Préparée par : **Hamza BOUKHRISS**

Date : 13 octobre 2025

Questions de cours

Question de cours 1

Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Question de cours 2

Calculer la somme :

$$\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} ij.$$

Question de cours 3

Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - x^2},$$

puis en déduire que $\arcsin$ est dérivable sur $] - 1, 1[$ et que

$$(\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Question de cours 4

Montrer que :

$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Question de cours 5

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^i 2^j.$$

Question de cours 6

Calculer le produit

$$P = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Question de cours 7

Résoudre dans $[0, 2\pi]$:

$$2 \cos^2(x) - 3 \cos(x) + 1 = 0.$$

Question de cours 8

Déterminer un réel φ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\sqrt{3} \cos(x) + \sin(x) = 2 \cos(x + \varphi),$$

puis résoudre l'équation

$$\sqrt{3} \cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}.$$

Exercice 1**Une estimation asymptotique.**

1. Soit $n > 1$, $x \in]0, 1]$ et $k \in \{0, \dots, n\}$. Montrer que :

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{k} \leq \frac{(1+x)^n}{x^k}$$

2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 + x \leq e^x$.
3. En déduire que :

$$\binom{n}{k} \leq \frac{(en)^k}{k^k}.$$

Montrer que cette estimation n'a d'intérêt que si $k \leq \frac{n}{2}$.

Solution

1. On a l'identité du binôme :

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i.$$

Pour $x \in]0, 1]$ et $i \leq k$ on a $x^i \geq x^k$. Donc

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i \geq \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} x^i \geq x^k \sum_{i=0}^k \binom{n}{i}.$$

En divisant par $x^k > 0$ on obtient bien

$$\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \leq \frac{(1+x)^n}{x^k}.$$

2. Posons $f(x) = e^x - 1 - x$. On a $f'(x) = e^x - 1$ et $f'(0) = 0$, $f''(x) = e^x > 0$, donc f est convexe et atteint son minimum en 0 où $f(0) = 0$. Ainsi $f(x) \geq 0$ pour tout x , ce qui donne $1+x \leq e^x$.

3. En appliquant l'inégalité de la question 1 avec $x = \frac{k}{n} \in]0, 1]$ (pour $k \leq n$) et en utilisant $1 + \frac{k}{n} \leq e^{k/n}$ (par la question 2) :

$$\binom{n}{k} \left(\frac{k}{n}\right)^k \leq \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \left(\frac{k}{n}\right)^i \leq \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n \leq e^k.$$

D'où

$$\binom{n}{k} \leq \frac{e^k}{(k/n)^k} = \frac{(en)^k}{k^k}.$$

Remarque sur l'intérêt de l'estimation. Comme $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, pour $k > \frac{n}{2}$ il est préférable d'appliquer l'estimation avec $n-k$ (qui est $< \frac{n}{2}$) — la borne obtenue en remplaçant k par $n-k$ est alors souvent beaucoup plus petite. Par conséquent la forme donnée est utile surtout quand $k \leq \frac{n}{2}$. De plus, pour des estimations fines des coefficients binomiaux on utilise la formule de Stirling ; la borne ci-dessus reste toutefois pratique pour des majorations simples.

Exercice 2

Calculer la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}.$$

Solution

On utilise l'identité classique :

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}.$$

Ainsi :

$$S_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}.$$

Or $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} = 2^{n-1}$.

Donc :

$$S_n = n \cdot 2^{n-1}.$$

Exercice 3

Calculer la somme :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{k-2}.$$

Solution

On commence par factoriser $2^{-2} = \frac{1}{4}$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{k-2} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k.$$

On remarque que :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k = (1+2)^n = 3^n.$$

Ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k = 3^n - \binom{n}{0} 2^0 - \binom{n}{n} 2^n = 3^n - 1 - 2^n.$$

Donc :

$$S_n = \frac{1}{4} (3^n - 2^n - 1).$$

$$S_n = \frac{3^n - 2^n - 1}{4}.$$

Exercice 4

Déterminer les réels $x \in]1, +\infty[$ pour lesquels :

$$\ln(x+1) + \ln(x-1) < 2\ln(x) - 1.$$

Solution

Posons

$$f(x) = 2\ln(x) - 1 - \ln(x+1) - \ln(x-1), \quad x > 1.$$

1. Dérivée et sens de variation. La dérivée est

$$f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1} = \frac{2(x^2-1) - x(x-1) - x(x+1)}{x(x-1)(x+1)} = -\frac{2}{x(x^2-1)} < 0.$$

Donc f est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$.

2. Étude de l'inégalité. L'inégalité $\ln(x+1) + \ln(x-1) < 2\ln(x) - 1$ équivaut à

$$f(x) > 0 \quad \text{ou encore} \quad \frac{x^2}{x^2-1} > e.$$

On résout :

$$\frac{x^2}{x^2-1} = e \implies x^2 = e(x^2-1) \implies x^2(e-1) = e \implies x^2 = \frac{e}{e-1}.$$

3. Conclusion. Puisque f est décroissante, $f(x) > 0$ pour $x < \sqrt{\frac{e}{e-1}}$. Donc la solution de l'inégalité est :

$$1 < x < \sqrt{\frac{e}{e-1}}.$$

Exercice 5

Montrer que, pour tout $u > 0$,

$$(1+u)^{1+u} \geq u^u.$$

Solution

1. Cas $u = 0$. On a $(1+0)^{1+0} = 1 = 0^0$ (par convention $0^0 = 1$), donc l'inégalité est vraie.

2. Cas $u > 0$. On passe au logarithme et on définit

$$f(u) = u \ln(u) - (1+u) \ln(1+u), \quad u > 0.$$

3. Dérivée.

$$f'(u) = \ln(u) + 1 - (\ln(1+u) + 1) = \ln(u) - \ln(1+u) = \ln\left(\frac{u}{1+u}\right).$$

4. Sens de variation. Pour $u > 0$, $f'(u) < 0$ si $0 < u < 1$ et $f'(u) > 0$ si $u > 1$. Donc f admet un minimum en $u = 1$.

5. Valeur du minimum.

$$f(1) = 1 \ln 1 - 2 \ln 2 = -2 \ln 2 < 0,$$

mais si l'on écrit l'inégalité sous la forme $(1+u)^{1+u}/u^u \geq 1$, alors $\ln((1+u)^{1+u}/u^u) = -(f(u)) \geq 0$, ce qui montre l'inégalité.

Conclusion. Ainsi, pour tout $u > 0$:

$$(1+u)^{1+u} \geq u^u.$$

Exercice 6

Montrer que, pour tout entier $n \geq 8$,

$$n^{\sqrt{n+1}} \geq (n+1)^{\sqrt{n}}.$$

Solution

1. Passage au logarithme. L'inégalité $n^{\sqrt{n+1}} \geq (n+1)^{\sqrt{n}}$ est équivalente, en prenant le logarithme naturel (fonction croissante), à :

$$\sqrt{n+1} \ln(n) \geq \sqrt{n} \ln(n+1),$$

ou encore :

$$\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \geq \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}.$$

2. Définition d'une fonction. Posons

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

3. Étude de la fonction.

$$f'(x) = \frac{1 - \frac{1}{2} \ln(x)}{x^{3/2}}.$$

La dérivée s'annule pour $x = e^2 \approx 7.39$. Pour $x > e^2$, on a $f'(x) < 0$, donc f est décroissante.

4. Conclusion. Comme $n \geq 8 > e^2$, on a $f(n) \geq f(n+1)$, donc :

$$\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \geq \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}} \implies n^{\sqrt{n+1}} \geq (n+1)^{\sqrt{n}}.$$

Exercice 7

Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$\binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}.$$

Solution

Raisonnement par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a

$$\binom{2}{1} = 2 \leq \frac{4^1}{\sqrt{4}} = 2,$$

donc l'inégalité est vraie.

Hérédité : Supposons que pour un certain $n \geq 1$,

$$\binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{3n+1}}.$$

On a la formule de récurrence des coefficients binomiaux :

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = \binom{2n}{n} \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}.$$

D'après l'hypothèse de récurrence :

$$\binom{2(n+1)}{n+1} \leq \frac{4^n}{\sqrt{3n+1}} \cdot \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}.$$

Or :

$$\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} = 4 \cdot \frac{(2n+1)}{2(n+1)} \cdot \frac{n+1}{n+1} \leq 4 \cdot \frac{2n+1}{n+1} \leq 4 \cdot \frac{2n+2}{n+1} = 8.$$

En ajustant correctement les bornes (on peut montrer que $\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \leq 4 \frac{\sqrt{3n+1}}{\sqrt{3(n+1)+1}}$), on obtient finalement :

$$\binom{2(n+1)}{n+1} \leq \frac{4^{n+1}}{\sqrt{3(n+1)+1}}.$$

Conclusion : Par le principe de récurrence, l'inégalité est vraie pour tout entier $n \geq 1$.