

Khôlle de Mathématiques

Préparée par : **Hamza BOUKHRISS**

Date : 6 octobre 2025

Questions de cours

Question de cours 1

Soit E, F deux ensembles, $f : E \rightarrow F$ une application et $B_1, B_2 \subset F$. Alors

$$f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2), \quad f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2).$$

Question de cours 2

Soit E, F, G trois ensembles, $f \in F^E$ et $g \in G^F$. Montrer que si f et g sont injectives (ou surjectives), alors $g \circ f$ est injective (ou surjective).

Question de cours 3

Soit E, F deux ensembles, $f \in F^E$ et $g \in E^F$ deux applications telles que

$$f \circ g = \text{Id}_F \quad \text{et} \quad g \circ f = \text{Id}_E.$$

Montrer que f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre.

Question de cours 4

Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton :

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Question de cours 5

Calculer la somme :

$$\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} ij.$$

Question de cours 6

Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - 2y = 4\}$ et $F = \{(4t + 2, 2t - 1) \mid t \in \mathbb{R}\}$. Montrer que $E = F$.

Question de cours 7

Calculer la somme

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^i 2^j.$$

Question de cours 8

Calculer le produit

$$\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right).$$

Question de cours 9

Déterminer trois réels a, b, c tels que pour tout entier $k \geq 2$,

$$\frac{k-5}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}.$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{k=2}^n \frac{k-5}{k(k^2-1)}.$$

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 \\ x + y \end{pmatrix}.$$

Étudier l'injectivité et la surjectivité de f .

Solution**1. Surjectivité :**

Pour tout $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, on cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 = a \\ x + y = b \end{cases}.$$

Si $a < 0$, il n'existe aucun (x, y) tel que $x^2 + y^2 = a$. Par exemple, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \text{Im}(f)$. Donc f n'est pas surjective.

2. Injectivité :

Supposons que $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ait au moins un antécédent (x, y) . On a alors

$$x^2 + y^2 = a, \quad x + y = b \implies y = b - x.$$

En remplaçant dans la première équation :

$$x^2 + (b - x)^2 = a \implies 2x^2 - 2bx + b^2 - a = 0.$$

Le discriminant de ce polynôme quadratique est

$$\Delta = (-2b)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (b^2 - a) = 8a - 4b^2.$$

En général, il y a deux solutions pour x , donc deux valeurs pour $y = b - x$. Par exemple, pour $b = 0$ et $a = 2$:

$$2x^2 - 0 + 0 - 2 = 0 \implies x = \pm 1, \quad y = -x \implies (1, -1), (-1, 1)$$

donc un élément a deux antécédents.

Conclusion : f n'est ni injective, ni surjective.

Exercice 2

Soit $m \in \mathbb{R}$. On définit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + my \\ y + mx \end{pmatrix}.$$

1. Discuter l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité de f en fonction de m .
2. Pour $m = -1$, préciser $\text{Im}(f)$.
3. Pour $m = 1$, donner l'expression de f^{-1} .

Solution**1. Injectivité, surjectivité et bijectivité :**

Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. On cherche les éventuels antécédents en résolvant le système :

$$(S) \quad \begin{cases} x + my = a \\ y + mx = b \end{cases}.$$

- Si $m^2 \neq 1$, le système admet une unique solution pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Donc f est injective et surjective, donc bijective.

- Si $m = 0$ ou $m = -1$, alors selon (a, b) : - Si $b - ma \neq 0$, le système n'a pas de solution f n'est pas surjective. - Si $b - ma = 0$, le système a une infinité de solutions f n'est pas injective. Donc f n'est pas bijective.

On peut réécrire (S) sous la forme :

$$y(m^2 - 1) = b - ma, \quad x = a - my.$$

2. Cas $m = -1$:

Le système devient

$$\begin{cases} x - y = a \\ y - x = b \end{cases} \iff a + b = 0.$$

Donc

$$\text{Im}(f) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a + b = 0\}.$$

3. Cas $m = 1$:

Le système devient

$$\begin{cases} x + y = a \\ y + x = b \end{cases} \iff a = b,$$

et on peut exprimer la solution en fonction de a :

$$x = \frac{a - b}{2}, \quad y = \frac{a + b}{2}.$$

Ainsi, pour $m = 1$:

$$f^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a - b}{2} \\ \frac{a + b}{2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 3

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y + z \\ 3x - y + z \\ 2x + z \end{pmatrix}.$$

Est-elle injective, surjective, bijective ? Déterminer $\text{Im } f$.

Solution

Soit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \text{Im } f$. On cherche le nombre de solutions de

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire du système :

$$\begin{cases} x + y + z = a & (1) \\ 3x - y + z = b & (2) \\ 2x + z = c & (3) \end{cases}$$

Étude de compatibilité du système :

- En combinant (1) et (2) : $(2) - 3 \times (1)$ donne $-4y - 2z = b - 3a \Rightarrow -2y - z = \frac{b-3a}{2}$ (2').
- En combinant (3) et (1) : $(3) - 2 \times (1)$ donne $-2y - z = c - 2a$ (3').

Pour que le système ait une solution, il faut

$$\frac{b-3a}{2} = c - 2a \iff a + b - 2c = 0.$$

Conséquences :

- Si $a + b - 2c \neq 0$, alors le système n'a pas de solution. Donc f n'est pas surjective (par exemple $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'a pas d'antécédent si la condition n'est pas satisfaite).
- Si $a + b - 2c = 0$, alors le système a une infinité de solutions (on peut exprimer x et y en fonction de z libre). Donc f n'est pas injective (par exemple $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ a plusieurs antécédents).

Image :

Ainsi,

$$\text{Im } f = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid a + b - 2c = 0 \right\}.$$

Conclusion :

L'application f n'est ni injective, ni surjective, donc elle n'est pas bijective. Son image est le sous-espace plan de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $a + b - 2c = 0$.

Exercice 4

Soit $E = [1, 6]$ et $A = \{2, 4, 6\}$. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E (c'est-à-dire $B \in \mathcal{P}(E) \iff B \subset E$). On définit $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ par

$$f(B) = A \cap B.$$

1. Quels sont les antécédents de $\emptyset$? L'ensemble E est-il dans l'image de f ?
2. Que peut-on dire de l'injectivité et de la surjectivité de f ?
3. Quel est l'espace image de f ?

Solution**1. Antécédents de $\emptyset$ et image :**

On a

$$f(B) = \emptyset \iff A \cap B = \emptyset,$$

c'est-à-dire que B ne contient aucun élément de A . Les antécédents de $\emptyset$ sont donc les parties de E ne contenant aucun élément de A , c'est-à-dire les parties de $\{1, 3, 5\}$. On peut les lister :

$$\emptyset, \{1\}, \{3\}, \{5\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{3, 5\}, \{1, 3, 5\}.$$

On ne peut pas avoir $E \in \text{Im}(f)$, sinon il existerait $B \subset E$ tel que $A \cap B = E$, ce qui est impossible car $A \cap B \subset A \neq E$.

2. Injectivité et surjectivité :

D'après ce qui précède, $\emptyset$ a plusieurs antécédents, donc f n'est pas injective. De plus, $E \notin \text{Im}(f)$, donc f n'est pas surjective.

Ainsi f n'est ni injective, ni surjective.

3. Image de f :

Pour tout $B \subset E$, $f(B) \subset A$, donc $\text{Im}(f) \subset \mathcal{P}(A)$.

Réciproquement, si $C \subset A$, alors $f(A \setminus C) = C$, donc $C \in \text{Im}(f)$.

Ainsi

$$\text{Im}(f) = \mathcal{P}(A).$$

Exercice 5

Simplifier la somme suivante :

$$S = \sum_{1 \leq i, j \leq n} (i + j).$$

Solution

On peut écrire :

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i + j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j.$$

Comme i ne dépend pas de j dans la première somme, on a :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i = \sum_{i=1}^n (ni) = n \sum_{i=1}^n i = n \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

De même :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j = n \sum_{j=1}^n j = n \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ainsi :

$$S = n \cdot \frac{n(n+1)}{2} + n \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n^2(n+1).$$

$S = n^2(n+1).$

Exercice 6

Calculer

$$S = \sum_{0 \leq k \leq i \leq n} \frac{k}{i+1}.$$

Solution

On échange l'ordre des sommes en gardant la condition $0 \leq k \leq i \leq n$:

$$S = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^i \frac{k}{i+1} = \sum_{i=0}^n \frac{1}{i+1} \sum_{k=0}^i k.$$

Or $\sum_{k=0}^i k = \frac{i(i+1)}{2}$, donc

$$\sum_{k=0}^i \frac{k}{i+1} = \frac{1}{i+1} \cdot \frac{i(i+1)}{2} = \frac{i}{2}.$$

Ainsi

$$S = \sum_{i=0}^n \frac{i}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^n i = \frac{1}{2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{4}.$$

$$\boxed{S = \frac{n(n+1)}{4}}.$$