

Questions de cours

- Partie entière d'un réel : définition et inégalité correspondante. Comment en déduire un encadrement de la partie entière ?
- Inégalité triangulaire.
- Formule de $a^n - b^n$.
- Que vaut $\sqrt{x^2}$? Expliciter l'inégalité $|x - a| \leq \varepsilon$.
- Comment rédiger une démonstration du type :
 - " $\forall x \in E, P(x)$ " ?
 - " $\exists ! x \in E, P(x)$ " ?
- $x^n x^p = \dots$, $\frac{x^n}{x^p} = \dots$, $(x^n)^p = \dots$, $(xy)^n = \dots$,
 $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \dots$.
 - $a^b = \dots$.

Exercices

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations

$$\lfloor \sqrt{x^2 + 1} \rfloor = 2 \quad \text{et} \quad \lfloor 2x + 1 \rfloor = \lfloor x + 4 \rfloor.$$

Exercice 2

Soit $n \geq 1$. On pose

$$P_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} \quad \text{et} \quad I_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k}.$$

Calculer $P_n + I_n$ et $P_n - I_n$. En déduire P_n et I_n .

Exercice 3

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$$

On pourra procéder par double inégalité.

Exercice 4

- Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que pour tout $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \leq \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 + \sum_{k=1}^n b_k^2 \right).$$

- En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}, \quad \left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

- (Bonus) Démontrer l'identité de Lagrange :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 + \sum_{1 \leq k < \ell \leq n} (a_k b_\ell - a_\ell b_k)^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2 \right).$$

Retrouver alors l'inégalité de C-S.

Exercice 5

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \quad \text{et} \quad \min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^n k^p \binom{n}{k}.$$

1. Calculer $S_0(n)$.
2. Calculer $S_1(n)$. *On réécrira $k \binom{n}{k}$ d'une autre manière.*
3. En déduire une expression explicite de $S_2(n)$. *On réécrira astucieusement k^2 comme la somme de ...*

Exercice 7

Soit x un nombre réel. Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n [kx]$. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{n(n+1)}{2} x - n \leq u_n \leq \frac{n(n+1)}{2} x.$$

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Vérifier que $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier pair. *On pourra utiliser le binôme de ...*
2. En déduire que la partie entière de $(2 + \sqrt{3})^n$ est un entier impair. *On pourra remarquer que $(2 - \sqrt{3})^n < 1$.*

Exercice 9

Soient $n, p \in \mathbb{N}$. Exprimer à l'aide de factorielles

$$\prod_{k=0}^{p-1} \frac{n-k}{p-k}.$$

Que reconnaît-on ?

Exercice 10

Soient a, b deux réels strictement positifs. Les parties suivantes sont-elles majorées, minorées ? Si oui, déterminer leur borne supérieure et/ou leur borne inférieure.

1. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$;
2. $\{a + (-1)^n b : n \in \mathbb{N}\}$;
3. $\{a + bn : n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 11

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ 0 \leq \ell \leq m}} \binom{n}{k} \ell^k$;
2. $\sum_{k=0}^n \binom{2n+1}{k}$ (*on effectuera le changement d'indice $l = 2n + 1 - k$*).

Exercice 12

Les parties de $\mathbb{R}$ suivantes sont-elles minorées, majorées ? Dans chaque cas, déterminer s'il y a lieu la borne inférieure, la borne supérieure, et dire s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum.

$$A = \left\{ \frac{n}{mn+1} : (m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\}, \quad B = \left\{ \frac{n}{mn+1} : (m, n) \in \mathbb{N}^2 \right\}.$$

Exercice 13

Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\lfloor x+1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

Exercice 14

Soient a, b deux réels strictement positifs. Les parties suivantes sont-elles majorées, minorées ? Si oui, déterminer leur borne supérieure et/ou leur borne inférieure.

1. $\left\{ a + \frac{b}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$;
2. $\left\{ (-1)^n a + \frac{b}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$;
3. $\left\{ a + (-1)^n \frac{b}{n} : n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Exercice 15

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. En utilisant $k = \sum_{l=1}^k 1$, démontrer

$$\sum_{k=1}^n kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}.$$

Exercice 16

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \dots, a_n), (b_1, \dots, b_n)$ deux n -uplets de réels.

1. Démontrer l'identité

$$\sum_{1 \leq k < \ell \leq n} (a_\ell - a_k)(b_\ell - b_k) = n \sum_{j=1}^n a_j b_j - \left(\sum_{j=1}^n a_j \right) \left(\sum_{j=1}^n b_j \right).$$

2. En déduire que si $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ et $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, alors

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b_k \right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$

Autrement dit, pour deux suites rangées par ordre croissant, le produit des moyennes est inférieur ou égal à la moyenne des produits.

Exercice 17

Encadrer $x + y$, $x - y$ et xy sachant que $x \in [3, 6]$ et $y \in [-4, -2]$.

Exercice 18

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que $2n \leq 2\sqrt{n(n+1)} < 2n+1$. On pourra montrer que pour tous réels $a, b > 0$, on a $2\sqrt{ab} \leq a+b$.
2. En déduire la valeur de $\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \rfloor$.

Exercice 19

Pour $x \in \mathbb{R}_+$, comparer $\lfloor \sqrt{x} \rfloor$ et $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor$. On pourra procéder par double inégalité.

Exercice 20

Soit $(p, n) \in \mathbb{N}$. On pose

$$S_p(n) = \sum_{k=p}^n \binom{k}{p}.$$

Interpréter $S_p(n)$ sur le triangle de Pascal et calculer cette somme en lui ajoutant astucieusement 0.

Exercice 21

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|x+3| = 5$;
2. $|x+3| \leq 5$;
3. $|x+2| > 7$.

Exercice 22

Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^n k! \leq (n+1)!.$$

Exercice 23

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|x + 12| = |x^2 - 8|$;

2. $|x + 12| \leq |x^2 - 8|$.

Exercice 24

Soit $n \geq 2$.

1. Démontrer l'identité $k^2 + k + 1 = (k + 1)^2 - (k + 1) + 1$.

2. En déduire alors une simplification de

$$P_n = \prod_{k=2}^n \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1}.$$

,