

Questions de cours

1. À l'aide du cercle trigonométrique, déterminer :

$$\cos(\pi/2 - x), \cos(\pi/2 + x), \sin(\pi/2 - x), \sin(\pi/2 + x).$$

2. Montrer que la fonction $\tan$ est π -périodique.
3. Si $y = f(x)$, qu'est-ce que y est par rapport à x et inversement ?
4. Comment montrer qu'une fonction est T -périodique ?
5. Comment montre-t-on qu'une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est une bijection ?
6. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Écrire la définition de la propriété " f est croissante (resp. décroissante, périodique, paire, impaire) sur $\mathbb{R}$ ".

Exercices

Exercice 1

1. Déterminer une expression de la fonction cotangente, définie par $\cotan(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$, différente de $1/\tan(x)$.
2. En déduire alors le graphe de la fonction cotangente (on représentera le graphe de la fonction tangente en premier).

Exercice 2

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue et strictement décroissante. Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[0, 1]$.

Exercice 3

1. Soit f un polynôme de degré n , $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$, avec $a_n \neq 0$. Démontrer que $x^{-n} f(x)$ admet une limite non nulle en $+\infty$.
2. On suppose qu'il existe deux polynômes P et Q tels que, pour tout $x > 0$,

$$\ln x = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

On note $p = \deg P$ et $q = \deg Q$. Démontrer que $x^{q-p} \ln(x)$ admet une limite non nulle en $+\infty$.

3. En déduire que l'hypothèse faite à la question précédente est fausse.

Exercice 4

Démontrer qu'il existe à tout moment deux points opposés sur l'équateur où les températures sont égales. On pourra considérer que la température à l'équateur est une fonction continue de la longitude.

Exercice 5

Soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions impaires. Que dire de la parité de $f + g$, $f \times g$ et $f \circ g$?

Exercice 6

Résoudre les inéquations suivantes en précisant leur domaine de définition :

$$(2x - 7) \ln(x + 1) > 0, \quad \ln\left(\frac{x + 1}{3x - 5}\right) \leq 0, \quad (\ln x + 1)(\ln x - 2) > 0.$$

Exercice 7

1. Résoudre l'équation $\cos(3\theta) = \cos(4\theta)$.
2. En déduire les solutions de l'équation (E) :

$$8x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer qu'elle peut s'écrire comme somme d'une fonction paire p et d'une fonction impaire i . Une telle décomposition est-elle unique ?

Exercice 9

Étudier la parité des fonctions :

$$f(x) = e^x - e^{-x}, \quad g(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

Exercice 10

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $2 \cos^2(x) + 9 \cos(x) + 4 = 0$.
2. Résoudre sur $[0, 2\pi]$ l'équation $\cos(2x) + \cos(x) = 0$.

Exercice 11

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln(|\sin(\frac{x}{2})|)$. Quel est le domaine de définition de f ? Est-elle paire ? impaire ? périodique ?

Exercice 12

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction $x \mapsto x^x$. Étudier les variations de cette fonction et ses limites aux bornes.
2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Quel est le nombre de solutions de l'équation $y = x^x$, d'inconnue $x > 0$?

Exercice 13

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations :

$$e^{2x} - e^x - 6 = 0 \quad \text{et} \quad 3e^x - 7e^{-x} = -20.$$

Exercice 14

Donner les ensembles de définition des fonctions définies par :

1. $f(x) = \sqrt{\frac{8 - 16x^2}{(7 + x^2)}} ;$
2. $g(x) = \ln(3 - x) + \sqrt{\frac{x - 1}{x - 2}}.$

Exercice 15

Déterminer le nombre de solutions dans $]0, +\infty[$ de l'équation

$$x \ln(x) = 1.$$

Exercice 16

On considère la courbe de la fonction exponentielle dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $g(x) = x + e^{2x}$. Démontrer qu'il existe un réel c tel que $g(x) < 0$ si $x < c$ et $g(x) > 0$ si $x > c$.
2. En déduire qu'il y a un unique point sur la courbe de la fonction exponentielle qui minimise la distance à l'origine. On le note M_0 .
3. Démontrer que la tangente à la courbe en M_0 est perpendiculaire à la droite (OM_0) .

Exercice 17

Soit $f : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$ définie par $f(x) = \frac{2x}{1 + x^2}$. Montrer que f est une bijection.

Exercice 18

Démontrer que la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par

$$f(x) = \frac{e^x + 2}{e^{-x}}$$

est bijective et calculer sa bijection réciproque f^{-1} .

Exercice 19

Résoudre l'équation

$$x - 1 \leq \sqrt{x + 2}.$$

Exercice 20

Déterminer, via l'étude d'une fonction, les entiers naturels n tels que

$$2^n \geq n^2.$$

Exercice 21

Donner les ensembles de définition des fonctions définies par :

1. $f_1(x) = \sqrt{2x^2 - 12x + 18}$;

2. $f_2(x) = \ln(x^2 + 4x + 4)$.

Exercice 22

Démontrer que pour tout $x \geq 0$, on a

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x.$$

Exercice 23

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{x+1}$. Justifier que la composée $f \circ f \circ \dots \circ f$ (itérée n fois) est bien définie sur $\mathbb{R}^+$, et expliciter son expression.

Exercice 24

Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, on a

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n}.$$