

Questions de cours

1. Covariance : définition, lien avec la variance et calcul de $\text{Cov}(aX + bY, cZ + dT)$.
2. Théorème de transfert.
3. Loi uniforme : définition, espérance et variance.
4. Loi de Poisson : définition, espérance et variance.
5. Loi géométrique : définition, espérance et variance.
6. Loi hypergéométrique : définition, espérance et variance.

Exercices

Exercice 1

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère un couple (X, Y) de variables aléatoires de loi conjointe donnée par :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad \mathbb{P}(X = i, Y = j) = a \frac{i + j}{i! j!}.$$

1. Déterminer a .
2. Déterminer les lois marginales de X et de Y . Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Démontrer que le couple (X, Y) admet une covariance et la calculer.

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{Z}$, suivant toutes une loi de Rademacher :

$$\mathbb{P}(X_n = -1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X_n = 1).$$

On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Pour $\varepsilon > 0$, calculer :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\frac{|S_n|}{n} > \varepsilon \mid S_{2n} = 0 \right).$$

On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

Exercice 3

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires de Rademacher indépendantes. Montrer que lorsque n tend vers l'infini

$$\mathbb{E} \left(\left| \sum_{k=1}^{2n} X_k \right| \right) \sim \sqrt{\frac{4n}{\pi}}.$$

On rappelle la formule de Stirling :

$$n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e} \right)^n.$$

Exercice 4

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes, centrées et à variances finies. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Montrer que pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{P} \left(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq x \right) \leq \frac{1}{x^2} \sum_{k=1}^n \text{Var}(X_k).$$

Exercice 5

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même univers Ω . Soient $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. On suppose que X (resp. Y) suit une loi de Poisson de paramètre λ (resp. μ). Montrer que la variable aléatoire $Z := X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice 6

Soit $\varepsilon > 0$ et X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètre $(n, p) \in \mathbb{N} \times]0, 1[$.

1. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2}.$$

2. On lance un dé cubique parfait. Déterminer un nombre de lancers à effectuer pour pouvoir affirmer, avec un risque d'erreur inférieur à 5%, que la fréquence d'apparition du 6 au cours de ces lancers diffère de $1/6$ d'au plus $1/100$?

Exercice 7

Soit X une variable aléatoire réelle et $a > 0$.

1. Démontrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq a) \leq \frac{t^2 + \text{Var}(X)}{(a+t)^2}.$$

2. En déduire l'inégalité de Cantelli :

$$\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq a) \leq \frac{\text{Var}(X)}{\text{Var}(X) + a^2}.$$

3. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes centrées et ayant toutes un moment d'ordre 2. On suppose que $\text{Var}(X_n) \geq 1$ pour tout n et on pose $N = \min \{n \in \mathbb{N}^* : X_n \leq 1\}$. Montrer que e^{aN} est d'espérance finie pour tout $a \in [0, \ln 2[$.

Exercice 8

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé. Montrer que

$$|\mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)| \leq \frac{1}{4}.$$

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \dots, A_n$ des événements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(A_k) = \frac{1}{2k}$. On note E_n l'événement au moins un des A_i est réalisé.

1. Calculer $\mathbb{P}(E_n)$.

2. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $1 - x \leq e^{-x}$.

3. En déduire que

$$\mathbb{P}(E_n) \geq 1 - \exp\left(-\sum_{k=1}^n \frac{1}{2k}\right).$$

4. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(E_n)$. Comment interpréter ce résultat ?

Exercice 10

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{1, 2, \dots, n\}$.

1. Calculer $\mathbb{P}(X = Y)$.

2. Calculer $\mathbb{P}(X \leq Y)$.

3. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 11

Soit X une variable aléatoire définie sur un univers Ω qui suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

1. Montrer que pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}(X > k + \ell \mid X > \ell) = \mathbb{P}(X > k).$$

On dit alors que la loi géométrique est une loi **sans mémoire**.

2. Soit Y une variable aléatoire définie sur Ω , à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\mathbb{P}(Y = 1) \in]0, 1[$. On suppose alors que X suit une loi sans mémoire. Montrer que Y suit une loi géométrique de paramètre $q := \mathbb{P}(Y = 1)$.

Exercice 12

Un insecte pond des œufs et la quantité d'œufs pondus est une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ où $\lambda > 0$. Chaque œuf a une probabilité p d'éclore, indépendante des autres œufs. Soit Z le nombre d'œufs qui ont éclos.

1. Pour $(k, n) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}(Z = k \mid X = n)$.
2. En déduire la loi de Z .
3. Quelle est l'espérance de Z ?