

Exercices

Exercice 1

Résoudre l'équation

$$x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x.$$

Exercice 2

Calculer $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 3

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \cos x + \cos(\alpha x)$. On veut montrer que f est périodique ssi $\alpha \in \mathbb{Q}$.

1. On suppose $\alpha = p/q \in \mathbb{Q}$. Montrer que f est périodique.
2. On suppose $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Résoudre $f(x) = 2$ puis en déduire que f n'est pas périodique.

Exercice 4

Étudier la fonction $f : x \mapsto x^{-\ln x}$.

Exercice 5

On cherche à déterminer tous les $t \in \mathbb{R}$ tels que

$$\cos t = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

1. Montrer qu'il existe une unique solution dans $]0, \pi/4[$. On la note t_0 .
2. Calculer $\cos(2t_0)$ puis montrer que $\cos(4t_0) = -\cos(t_0)$.
3. En déduire t_0 et résoudre l'équation.

Exercice 6

Montrer que l'équation

$$\ln(1 + |x|) = \frac{1}{x - 1}$$

admet exactement une solution α dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et que $1 < \alpha < 2$.

Exercice 7

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation

$$\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}.$$

Exercice 8

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3}.$$

1. Pour quelles valeurs de $y \in \mathbb{R}$ l'équation $f(x) = y$ admet-elle des solutions ? En déduire l'image $f(\mathbb{R})$.
2. Par quelle autre méthode peut-on déterminer $f(\mathbb{R})$?

Exercice 9

Soit $f : E \rightarrow E$ une application et $F = \{x \in E : f(x) = x\}$ l'ensemble des points fixes de f . Montrer que $f \circ f = f$ si, et seulement si, $f(E) \subset F$.

Exercice 10

Soit $\theta \in]0, \pi[$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\prod_{j=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^j}\right) = \frac{\sin \theta}{2^n \sin(\theta/2^n)}.$$

2. En déduire, si elle existe, la limite quand $n \rightarrow +\infty$ de la suite

$$\left(\prod_{j=1}^n \cos\left(\frac{\theta}{2^j}\right) \right)_{n \geq 1}.$$

Exercice 11

Résoudre les équations

$$-\sqrt{2} \cos x + \sqrt{2} \sin x = 1 \quad \text{et} \quad \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x = -\sqrt{2}.$$

Exercice 12

On considère $T : \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ définie par

$$\forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad (T(f))(x) = f(x+1) - f(x).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $T^n = T \circ \dots \circ T$ (itéré n fois).

1. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, calculer $(T^2(f))(x)$ et $(T^3(f))(x)$.
2. Proposer une formule générale fermée pour $(T^n(f))(x)$ et la démontrer.

Exercice 13

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $a_1 + \dots + a_n = 0$. Montrer que

$$\sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=1}^n |a_k|.$$

Exercice 14

On considère l'équation

$$e^{x-2} + e^{x+8} = e^{4-x} + e^{3x+2}.$$

1. Toto a "résolu" cette équation en utilisant la formule (archi-fausse) $e^a + e^b = e^{ab}$. Déterminer les "solutions" trouvées par Toto.
2. Résoudre correctement l'équation. Que dire ?

Exercice 15

Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par $f(x) = \sin x$ et $g(x) = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Écrire explicitement $f \circ g$ et $g \circ f$.
2. Ces deux applications sont-elles égales ?
3. Sont-elles périodiques ?

Exercice 16

Soit $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $F(x, y) = (x + y, xy)$.

1. Pour $(S, P) \in \mathbb{R}^2$, déterminer le nombre de solutions de l'équation $F(x, y) = (S, P)$ en inconnues $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. L'application F est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2. Comment restreindre F pour qu'elle devienne bijective ? (On cherchera d'abord une partie $A \subset \mathbb{R}^2$ telle que $F(A) = F(\mathbb{R}^2)$.)