



Exercice 1: Soit $m \geq 0$.

1) On pose

$$f_m(x) = x^5 + mx - 1,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

f_m est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'_m(x) = 5x^4 + m > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Ainsi, f est strictement $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$.

De plus, $f(0) = -1$ et $f(1) = m \geq 0$. On en déduit alors, par le TVS, l'existence d'un réel, noté v_m , tel que :

$$f_m(v_m) = 0,$$

avec $v_m \in [0, 1]$.

Pour la stricte monotonie de f_m , la solution v_m est unique.

2). - $\forall m \geq 0, v_m \in [0, 1]$.

- Soit $m \geq 0$. On a :

$$f_{m+1}(v_m) = v_m \geq 0 = f_{m+1}(v_{m+1}),$$

d'où : $U_n \geq U_{n+1}$
 d'après la suite $\nearrow$ de f_{n+1} .
 Ainsi, $(U_n)_n$ décroissante.

$\rightarrow$ Par thm de convergence monotone,
 U_n converge (vers $l \in [0, 1]$).

• Par passage à la limite, on a :

$$+\infty > l^S - 1 = - \lim_{n \rightarrow +\infty} n U_n \quad (*)$$

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n U_n = +\infty$: ce qui
 est absurde d'après (*).

Nécessairement, $l = 0$.

3) D'après (*), on a :

$$0^S - 1 = -1 = - \lim_{n \rightarrow +\infty} n U_n,$$

d'où :

$$U_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

exercice 2:

Soit $(U_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ une suite convergente.

Alors: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall n \geq N,$
 $|U_n - l| \leq \varepsilon.$

On prend $\varepsilon = \frac{1}{2}$. On a:

$$\forall n \geq N, -\frac{1}{2} \leq U_n - l \leq \frac{1}{2}.$$

Or, $U_n \in \mathbb{Z}$ et $l \in \mathbb{Z}$ donc $U_n - l \in \mathbb{Z}$.
Or le seul entier entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ est 0.

Finalement, $\forall n \geq N, U_n - l = 0,$

i.e.: $\forall n \geq N, U_n = l.$

exercice 3:

1) Soit $(U_n)_n$ convergente vers $l \in \mathbb{R}$:
 $\forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall n \geq N, |U_n - l| \leq \varepsilon.$ (a)

Soit alors $p, q \geq N$. On a :

$$|v_p - v_q| = |v_p - l + l - v_q|$$

$$\begin{aligned} &\leq |v_p - l| + |l - v_q| \\ \text{d'après (*)} \quad &\leq \varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

$= 2\varepsilon$, (le 2 étant une cste)
et (v_n) est de Cauchy. (ceci reste valable)

2) Soit $(v_n)_n$ de Cauchy. On prend $\varepsilon = 1$:

$$\exists N \geq 0, \forall p, q \geq N, |v_p - v_q| \leq 1.$$

En particulier,

$$\forall p \geq N, |v_p - v_N| \leq 1.$$

$$\text{Or, } |v_p| - |v_N| \leq |v_p - v_N|, \text{ donc :}$$

$$\forall p \geq N, |v_p| \leq |v_N| + 1.$$

On pose $M = \max\{|v_0|, \dots, |v_{N-1}|, |v_N| + 1\}$ et
 $|v_n| \leq M, \forall n \geq 0.$

exercice 4: soit $n \geq 0$.

1) $2V_{n+1} \geq V_n + V_{n+2}$

$$V_{n+1} + V_{n+1} \geq V_n + V_{n+2}$$

$V_{n+1} - V_n \geq V_{n+2} - V_{n+1}$ et $(V_{n+1} - V_n)_n$ est une suite constante: d'où (V_n) arith.

2) $V_{n+1}^2 = V_n V_{n+2}$

$\Rightarrow \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{V_{n+2}}{V_{n+1}}$ et $\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right)_n$ est constante,
d'où le résultat.

exercice 5: $x \in \mathbb{R}_+, n \geq 1$

1) On pose $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x - 1$

$L \supset \text{TVI} + \text{stricte} \nearrow$

$$(f_n(0) = -1 \text{ et } f_n(1) = n - 1 \geq 0)$$

2) $f_{n+1}(V_n) = V_n^{n+1} + f(V_n) = V_n^{n+1} > 0$
 $= f_{n+1}(V_{n+1})$

d'où par suite. $\nearrow$ de l'exercice,

$$U_n > U_{n+1} \text{ (c. à d. } (U_n) \searrow)$$

Or, $U_n \in [0, 1]$ pour tout n , donc par thm. de convergence monotone, (U_n) est convergente vers un réel $l \in [0, 1]$.

On a :

$$U_n^n + U_n^{n-1} + \dots + U_n = 1$$

$$\sum_{k=0}^n U_n^k = 1$$

$$= \frac{1 - U_n^{n+1}}{1 - U_n} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1 - U_n^{n+1}}{(1 - U_n) \neq 0} = 1,$$

$$\text{d'où : } -U_n^{n+1} + U_n = 1 - U_n$$

$$\text{i.e. : } \boxed{2U_n - 1 = U_n^{n+1}} \quad (\otimes)$$

De plus, on a :

$$0 \leq U_n^{n+1} \leq U_2^{n+1},$$

car $(U_n) \searrow$.

U_2 est l'unique racine positive
de $x^2 + x - 1 = f_2(x)$ et vaut

$$U_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} < 1,$$

d'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_2^{n+1} = 0$$

Dans (a), on tire alors :

$$2l - 1 = 0,$$

c-à-d :

$$l = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{1}{2}.$$

exercice 6 :

cf. corrigé semaine prochaine

exercice 7:

$$1) V_{m+1} - V_m = \frac{1}{(m+1)\ln(m+1)} \geq 0$$

$$2) \frac{V_{m-1}}{V_m} \geq 1 \Leftrightarrow m \leq 3$$

$(V_m) \searrow$ à partir de $m=4$

3) On étudie w définie par:

$$w(x) = \ln(x) \leq \frac{4}{\sqrt{x}}$$

On trouve $w_m \nearrow$ à partir de $m=4$.

exercice 8:

$$\begin{aligned} V_m &= \underbrace{\prod_{h=1}^m \left(2 - \frac{h}{2^m}\right)}_{\left(\frac{3}{2}\right)^m} \underbrace{\prod_{h=m+1}^{2^m-1} \left(2 - \frac{h}{2^m}\right)}_{\geq 1} \\ &\geq \left(\frac{3}{2}\right)^m \longrightarrow +\infty \text{ car } \frac{3}{2} > 1. \end{aligned}$$

exercice 9:

Point clé: $\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2\sin(x)}, x \neq 0$
 $(\sin 2x = 2\sin(x)\cos(x))$

Comme $U_0 \in [0, 1[$, il existe $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$
t.q. $U_0 = \cos(\theta)$.

Ainsi, d'après la formule

$$\cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1,$$

on trouve : $U_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right), \forall n \geq 0.$

Finalement,

$$\begin{aligned} N_n &= \prod_{i=1}^n U_i \\ &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{4}\right) \dots \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right) \\ &= \frac{\sin(\theta)}{2^n \sin\left(\frac{\theta}{2^n}\right)} \end{aligned}$$

$$\text{et } v_m \longrightarrow \frac{v_m(0)}{0} \left(= \frac{\sqrt{1-v_0^2}}{\arccos(v_0)} \right) \\ \in \mathbb{R}$$

$$\sim \text{car } v_0 = 1, v_m = 1 \text{ pour tout } m \geq 0$$

exercice 10: soit $m \geq 0$.

$$1) a_{m+1} + b_{m+1} = -2a_m + b_m + 3a_m \\ = a_m + b_m$$

et $(a_m + b_m)_m$ est constante égale à $a_0 + b_0 = 1$.

$$2). \forall m \geq 0, a_m = b_m - 1 \text{ (cf. } \uparrow)$$

Calculons alors a_m , pour tout $m \geq 0$.

On a : $a_{m+1} = 1 - 3a_m$ d'après ce qui précède, et (a_m) est arithmético-géométrique.

$$\therefore \text{on trouve } a_m = \frac{1 - (-3)^m}{4}$$

Puis $b_n = \frac{3 + (-3)^n}{4}$.

exercice 11:

D'après l'énoncé, on a :

$$\forall n \geq n_0, \frac{U_{n+1}}{V_{n+1}} \leq \frac{U_n}{V_n}.$$

d'où $\left(\frac{U_n}{V_n}\right)_{n \geq n_0}$ est décroissante. Ainsi,

$$\frac{U_n}{V_n} \leq \frac{U_{n_0}}{V_{n_0}}, \forall n \geq n_0.$$

On pose alors $c = \max\left\{\frac{U_0}{V_0}, \dots, \frac{U_{n_0}}{V_{n_0}}\right\}$.

Alors :

$$\forall n \geq 0, \frac{U_n}{V_n} \leq c$$

i.e. :

$$\forall n \geq 0, U_n \leq c V_n.$$

exercice 12:

1) $\lim (U_n - V_n) = 0$

— $(U_n)_n$ strictement $\nearrow$

— $V_{n+1} - V_n = \dots = - \frac{1}{n(n+1)(n+1)!} < 0$

$\hookrightarrow (V_n)$ strictement $\searrow$

2) On suppose $e = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{N}^*$
D'après 1), on a :

$$U_q < e < V_q,$$

$$\text{c-} e : U_q < \frac{p}{q} < V_q + \frac{1}{q \cdot q!}$$

d'où :

$$q \cdot q! \cdot U_q < \underbrace{p \cdot q!}_{\in \mathbb{N}} < q \cdot q! \cdot V_q + 1$$

$$\text{Or } U_q = q \sum_{h=0}^q \frac{q!}{h!} \in \mathbb{Z} \text{ donc on a}$$

de trouver un entier (pq!) strictement compris entre 2 entiers consécutifs: absurde.

exercice 13:

$$\begin{aligned} 1) \quad U_{3m} &= \cos\left(\frac{(9m^2 + 1)\pi}{3m}\right) \\ &= \cos\left(3m\pi + \frac{\pi}{3m}\right) \\ &= (-1)^m \cos\left(\frac{\pi}{3m}\right) \end{aligned}$$

$$U_{6m} \longrightarrow 1 \quad (U_{3(2m)} = U_{6m})$$

$$U_{6m+3} = U_{3(2m+1)} \longrightarrow -1$$

donc $(U_{3m})_m$ diverge.

$\Rightarrow (U_n)$ diverge "grossièrement".

$$2) v_{2m} \sim m \longrightarrow +\infty$$

$$v_{2m+1} \sim -m \longrightarrow -\infty$$

$\hookrightarrow v_m$ diverge "grossièrement".

$$3) \omega_{2m} = \frac{L_m^{[2m]}}{m^m} = \frac{m^m}{m^m} = 1 \longrightarrow 1$$

$$\omega_{2m+1} = \frac{L_{m+\frac{1}{2}}^{[2m+1]}}{(m+\frac{1}{2})^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{m}{(m+\frac{1}{2})^{m+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\cancel{m^m} \left(1 + \frac{1/2}{m}\right)^m \left(m+\frac{1}{2}\right)^{1/2}}{\cancel{m^m} \left(m+\frac{1}{2}\right)^{m+\frac{1}{2}}} \longrightarrow +\infty$$

$\longrightarrow e^{1/2} = \sqrt{2}$

$\longrightarrow +\infty$

exercice 14:

1). Pour tout $n \geq 0$, on a:

$$\begin{aligned}(U_{n+2} - U_{n+1}) - (U_{n+1} - U_n) &= U_{n+2} - 2U_{n+1} + U_n \\ &\geq U_{n+2} - 2 \frac{U_n + U_{n+2}}{2} + U_n \\ &= 0\end{aligned}$$

donc $(U_{n+1} - U_n)_n$ est croissante.

De plus, $\exists m, M \in \mathbb{R}, m \leq U_n \leq M,$
 $\forall n \geq 0.$

Ainsi, on obtien: pour tout $n \geq 0$,

$$m - M \leq U_{n+1} - U_n \leq M - m$$

et $(U_{n+1} - U_n)$ est donc majorée.

↳ Par thm de CV monotone,
 $(U_{n+1} - U_n)$ converge vers $l \in \mathbb{R}.$

2). Cas: $l \leq 0$

$$- U_{n+1} - U_n \longrightarrow l \leq 0$$

- Or, $(U_{n+1} - U_n)_n$ est $\nearrow$ donc :

$$U_{n+1} - U_n \leq 0,$$

i.e :

$$U_{n+1} \leq U_n,$$

$$\forall n \geq 0.$$

Le thm de convergence permet alors de conclure.

. Cas: $l > 0$

$$- U_{n+1} - U_n \longrightarrow l > 0$$

$$\hookrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \geq 0, \forall n \geq N,$$

$$|(U_{n+1} - U_n) - l| \leq \varepsilon$$

$$\underline{\varepsilon = \frac{l}{2}}: \exists N \geq 0, \forall n \geq N,$$

$$-\frac{l}{2} \leq U_{n+1} - U_n - l \leq \frac{l}{2},$$

c.e: $U_{n+1} - U_n \geq \frac{1}{2} > 0.$

donc, $(U_n)_{n \geq n_0}$ est croissante.

le thm de CV monotone permet alors de conclure.

exercice 15:

1) $n \cos\left(\frac{1}{n}\right) \longrightarrow +\infty$

2) technique quantité conjuguée:

$$\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+1} = \frac{2}{\sqrt{n^2+3} + \sqrt{n^2+1}} \longrightarrow 0$$

3) $(n^2)^{1/n} = e^{\frac{2 \ln(n)}{n}}$ et $\frac{\ln(n)}{n} \longrightarrow 0$

$$\sqrt[n]{n^2} \longrightarrow e^{2 \times 0} = e^0 = 1$$

exercice 16:

$U_{2n} \longrightarrow \alpha, U_{2n+1} \longrightarrow \beta$

$U_{3n} \longrightarrow \gamma$

• (U_{6n}) suite extraite de (U_{2n})

$$\begin{array}{ccccc} L \supset & U_{6n} & \longrightarrow & \alpha \\ (U_{6n}) & // & & // & (U_{3n}) \end{array}$$

$$L \supset U_{6n} \longrightarrow \gamma$$

Ainsi, $\alpha = \gamma$.

• (U_{6n+3}) est extraite de (U_{2n+1}) donc

$$U_{6n+3} \longrightarrow \beta$$

Or, c'est aussi une suite extraite de (U_{3n}) donc :

$$U_{6n+3} \longrightarrow \gamma,$$

Donc : $\beta = \gamma$.

• Par suite, $\alpha = \beta$

t.c.: $\lim U_{2n} = \lim U_{2n+1} \in \mathbb{R}$
et $(U_n)_n$ converge.