

Questions de cours

1. Donner la définition théorique (avec ε) de la convergence d'une suite.
2. Donner les équivalents de :
 $\tan u_n, \quad \sin u_n, \quad \cos u_n - 1, \quad \ln(1 + u_n), \quad e^{u_n} - 1, \quad (1 + u_n)^\alpha - 1.$
3. Énoncer tous les théorèmes de comparaison.
4. Est-ce toujours vrai qu'une suite est équivalente à sa limite ?
5. Donner la définition d'un majorant d'une suite.
6. Donner "la" définition de deux suites équivalentes.

Exercices

Exercice 1

Soit (u_n) une suite de réels telle que $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier l'existence et la bonne définition d'une telle suite.
2. Étudier (u_n) .
3. En déduire un équivalent de u_n .

Exercice 2

Montrer que toute suite d'entiers convergente est stationnaire.

Exercice 3

On dit que $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est une *suite de Cauchy* si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \quad |u_p - u_q| \leq \varepsilon.$$

1. Démontrer que toute suite convergente est de Cauchy.
2. Démontrer que toute suite de Cauchy est bornée.

Exercice 4

1. Soit (u_n) une suite de nombres réels telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}.$$

Démontrer que (u_n) est arithmétique.

2. Soit (v_n) une suite de nombres réels strictement positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = \sqrt{v_n v_{n+2}}.$$

Démontrer que (v_n) est géométrique.

Exercice 5

Soit (u_n) une suite de réels telle que $u_n^n + u_n^{n-1} + \dots + u_n - 1 = 0$ pour tout $n \geq 1$.

1. Justifier l'existence et la bonne définition d'une telle suite.
2. Étudier la suite (u_n) .

Exercice 6

Soit $\alpha > 0$ un nombre irrationnel et (r_n) une suite de nombres rationnels qui converge vers α . Pour tout n , on écrit $r_n = \frac{p_n}{q_n}$, où $p_n \in \mathbb{Z}$ et $q_n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} q_n = +\infty.$$

Exercice 7

Étudier la monotonie des suites définies par

$$u_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln k}, \quad v_n = \frac{5^n}{n!} \quad \text{et} \quad w_n = \ln(n) + \frac{4}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 8

Étudier la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$u_n = \prod_{k=1}^{2n-1} \left(2 - \frac{k}{2n} \right).$$

Indication : couper le produit au "milieu".

Exercice 9

Soit (u_n) une suite définie par $0 \leq u_0 < 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}$, pour tout $n \geq 0$. On considère également la suite (v_n) définie par

$$v_n = \prod_{i=1}^n u_i,$$

pour tout $n \geq 0$. Montrer que (v_n) est convergente et calculer sa limite. Que dire du cas $u_0 = 1$?

(Bonus) Que dire du cas $u_0 > 1$?

Exercice 10

Soient (a_n) et (b_n) deux suites telles que $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = -2a_n + b_n, \quad b_{n+1} = 3a_n.$$

1. Montrer que la suite $(a_n + b_n)$ est constante.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer a_n et b_n en fonction de n .

Exercice 11

Soient (u_n) et (v_n) deux suites strictement positives. On suppose qu'il existe $n_0 \geq 0$ tel que, pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Démontrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}_+^*$ telle que, pour tout $n \geq 0$,

$$u_n \leq c v_n.$$

Exercice 12

Posons, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n n!}.$$

1. Démontrer que (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. Démontrer que e est un irrationnel. *Indication : raisonner par l'absurde en supposant qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $e = p/q$ et s'intéresser à l'encadrement $u_q < e < v_q$.*

Exercice 13

Démontrer que les suites ci-dessous n'ont pas de limite :

$$u_n = \cos\left(\frac{(n^2 + 1)\pi}{3n}\right), \quad v_n = \frac{1}{(-1)^n \ln(1 + 1/n)}, \quad w_n = \frac{\lfloor n/2 \rfloor^{\lfloor n/2 \rfloor}}{(n/2)^{n/2}}.$$

Exercice 14

Soit (u_n) une suite réelle bornée telle que

$$\forall n \geq 1, \quad u_n \leq \frac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}.$$

On dit que (u_n) est *convexe*.

1. Montrer que $(u_{n+1} - u_n)$ est convergente. On note ℓ sa limite.
2. Démontrer que la suite (u_n) est convergente. Distinguer les cas $\ell \leq 0$ et $\ell > 0$.

Exercice 15

Étudier le comportement asymptotique des suites, définies pour $n \geq 1$, par

1. $n \cos\left(\frac{1}{n}\right)$,
2. $\sqrt{n^2 + 3} - \sqrt{n^2 + 1}$,
3. $\sqrt[n]{n^2}$.

Exercice 16

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite telle que les sous-suites $(u_{2n})_{n \geq 0}$, $(u_{2n+1})_{n \geq 0}$ et $(u_{3n})_{n \geq 0}$ convergent. Montrer que $(u_n)_{n \geq 0}$ converge.