

Exercices

Exercice 1

Soient E, F, G trois K -espaces vectoriels. On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. On dit que

$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$

est une *suite exacte* lorsque $\text{Im } f = \ker g$.

1. Que peut-on alors dire de $g \circ f$?
2. Que dire lorsque $\{0\} \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$ est exacte ? Que dire lorsque $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} \{0\}$ est exacte ?
3. Dans cette question, on suppose que :

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \longrightarrow 0$$

est une suite exacte.

- (a) Montrer qu'il existe une *section* $s : G \rightarrow F$ telle que $g \circ s = \text{Id}_G$.
- (b) En déduire que l'on a :

$$E \oplus G \xrightarrow{\sim} F,$$

en explicitant l'isomorphisme.

Exercice 2

Soit S l'ensemble des matrices réelles stochastiques, c'est-à-dire l'ensemble des matrices $P = (p_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad p_{ij} \geq 0 \quad \text{et} \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1.$$

1. Montrer que tous les éléments de S ont une valeur propre commune.
2. Que dire de la stabilité de S pour $\times$?
3. Soit $P \in S$ et λ une valeur propre de P . Montrer que $|\lambda| \leq 1$.

Exercice 3

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{K})$. On pose, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$R_i = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{ij}|.$$

On suppose que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $|a_{ii}| > R_i$. Montrer que la matrice A est inversible.

Exercice 4

Soit A une matrice réelle carrée d'ordre n , où $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que A est inversible et on prend $\lambda \in \mathbb{R}$, une valeur propre de A .

1. Montrer que $\lambda \neq 0$.
2. Soit x vecteur propre associé à λ . Démontrer que x est également vecteur propre de la matrice A^{-1} associé à la valeur propre $\frac{1}{\lambda}$.

Exercice 5

Que peut-on dire d'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\text{Tr}(A^t A) = 0 ?$$

Exercice 6

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose

$$A(\omega) = \begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer la probabilité que A soit inversible.
2. Soit λ_1 et λ_2 les variables aléatoires égales aux valeurs propres de A . Calculer $\text{Cov}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Exercice 7

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

1. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Calculer $R(\alpha)R(\beta)$.
2. Calculer $R(0)$. En déduire que $R(\theta)$ est inversible pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et préciser son inverse.
3. Retrouver le résultat précédent à l'aide du déterminant.

Exercice 8

Soient E un K -espace vectoriel de dimension finie n et F, G deux sous-espaces de E . On suppose que $\dim F + \dim G > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0_E\}$.