

Exercices

Exercice 1

Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\ln(u_n) + nu_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier l'existence et la bonne définition d'une telle suite.
2. Étudier (u_n) .
3. En déduire un équivalent de u_n .

Exercice 2

1. Soit $n \geq 0$. Montrer que $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$ est un entier pair.
2. En déduire la limite de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \sin\left((2 + \sqrt{3})^n \pi\right),$$

pour tout $n \geq 0$.

Exercice 3

Soit (u_n) une suite réelle. On considère la suite (v_n) des moyennes de Cesàro définie par :

$$v_n = \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_n}{n+1}.$$

1. On suppose que (u_n) converge vers un réel l . Montrer que la suite (v_n) converge également vers l .
2. Montrer que la réciproque est fausse en général.

Exercice 4

Calculer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(n+1)^k} \right) \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{(n+1)^k} \right).$$

Exercice 5

Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que $\tan\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \frac{\pi}{2nx}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier l'existence et la bonne définition d'une telle suite.
2. Étudier (x_n) .
3. En déduire un équivalent de x_n .

Exercice 6

Soit (u_n) une suite réelle positive telle que

$$\forall p, q \in \mathbb{N}, \quad u_{p+q} \leq u_p + u_q.$$

1. Justifier l'existence de la borne inférieure de la suite (u_n/n) .
2. Montrer que la suite (u_n/n) n'est pas nécessairement décroissante.
3. Soient $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $m > n$. On écrit la division euclidienne de m par n :

$$m = nq + r,$$

avec $0 \leq r < n$. Montrer que

$$\frac{u_m}{m} \leq \frac{u_n}{n} + \frac{u_r}{m}.$$

En déduire que (u_n/n) converge vers sa borne inférieure.

Exercice 7

Déterminer un équivalent de chacune des suites puis calculer leur limite :

1. $n(\sqrt{1+e^{-n}} - 1)$,
2. $\frac{\sqrt{n+1}(1 - \cos(1/n))}{\tan^3(1/\sqrt{n})}$,
3. $\sin(\sqrt[n]{2} - 1)$,
4. $\sqrt{1 - \cos(ne^{-n})}$.

Exercice 8

1. À l'aide des formules d'addition, retrouver la formule

$$\sin p - \sin q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right).$$

2. En déduire la limite de la suite (u_n) définie pour $n \geq 1$ par

$$u_n = \sin(\ln(n+1)) - \sin(\ln n).$$

Exercice 9

Soit (x_n) une suite de réels positifs telle que $x_n \sin x_n - c \cos x_n = 0$ ($c > 0$) et $x_n \in \left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right]$, pour tout $n \geq 0$.

1. Justifier l'existence et la bonne définition d'une telle suite.
2. Étudier (x_n) .
3. En déduire un équivalent de x_n .
4. (**Bonus**) En déduire également un équivalent de la suite (u_n) définie par

$$u_n = x_n - n\pi,$$

pour tout $n \geq 0$. On admettra que $\arctan x \sim x$ en 0.

Exercice 10

1. Démontrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$,

$$|\sin(1/n)| \leq \frac{1}{16}.$$

2. Quelle est la nature de la suite (u_n) définie par

$$u_n = \left(2 \sin\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{3}{4} \cos(n)\right)^n ?$$

Exercice 11

Soient (a_n) et (b_n) deux suites réelles définies par $a_0, b_0 \in \mathbb{R}_+$ et les relations de récurrences croisées

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Montrer que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers une limite commune (appelée moyenne arithmético-géométrique de a_0 et b_0).

Exercice 12

Soient (u_n) et (v_n) deux suites à valeurs dans $[0, 1]$ telles que $\lim u_n v_n = 1$. Montrer que $\lim u_n = 1$ et $\lim v_n = 1$.

Exercice 13

Étudier les comportements asymptotiques des suites définies par

$$\alpha_n = \sum_{k=1}^n \frac{k+n^2}{k+n^3} \quad \text{et} \quad \beta_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \lfloor k\pi \rfloor.$$

Exercice 14

Déterminer un équivalent de chacune des suites puis calculer leur limite :

1. $4^n - 2n^7 - \ln(\sqrt{n})$,
2. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$,
3. $n^{1/n} - 1$,
4. $\sqrt[3]{\frac{n+1}{n}} - 1$.

Exercice 15

Soit (x_n) une suite de réels positifs telle que $x_n^n = e^{x_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier l'existence et la bonne définition d'une telle suite.
2. Étudier (x_n) .