

Exercices

Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $A^2 + A + I_n = 0$. Montrer que n est pair.
2. On suppose que $A^3 + A^2 + A = 0$. Montrer que le rang de A est pair.

Exercice 2

Soit $n \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que

$$AB - BA = A.$$

1. Montrer que, pour tout $k \geq 0$, on a $A^k B - BA^k = kA^k$.
2. En déduire l'existence d'un entier $k > 0$ tel que $A^k = 0$.

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$ diagonalisable. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ les valeurs propres deux à deux distinctes de A et $n_1, \dots, n_r$ leurs multiplicités respectives. On note $C(A)$ le commutant de A , i.e

$$C(A) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) : AM = MA\}.$$

Calculer la dimension de $C(A)$.

Exercice 4

Déterminer toutes les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisables (sur $\mathbb{R}$) telles que

$$A^3 + 2A = 3I_n.$$

Exercice 5

Soit $n \geq 2$. On considère la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $a_{i,i+1} = 1$ pour $1 \leq i \leq n-1$ et $a_{i,j} = 0$ sinon.

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Existe-t-il $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $B^2 = A$?

Exercice 6

Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable et $F \subset E$ un sous-espace stable par u . Montrer que $u|_F$ est encore diagonalisable.
2. Soit u et v deux endomorphismes de E vérifiant

$$u \circ v = v \circ u.$$

Montrer que u et v admettent une base commune de diagonalisation.

Exercice 7

Soit L l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par

$$L(P) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right).$$

1. Montrer que L est un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer ses valeurs propres et une base de vecteurs propres associés.

Exercice 8

Soit E un K -espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que, pour tout $x \in E$, les vecteurs x et $u(x)$ sont colinéaires. Démontrer que u est une homothétie.

Exercice 9

Soit $n \geq 2$ un entier. On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont *semblables* s'il existe une matrice inversible $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A = Q B Q^{-1}.$$

On considère les deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Les matrices A et B sont-elles semblables ?
2. (a) Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = B$?
(b) Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A)$ soit semblable à B ?