

Questions de cours

1. Donner la définition de la continuité en un point x_0 .
2. Citer les théorèmes de comparaison.
3. Quelle est la différence entre un segment et un intervalle ?
4. Que dire d'une fonction continue sur un segment ?
5. Citer le théorème des valeurs intermédiaires.
6. Citer le théorème de la bijection monotone. Pour montrer que 0 admet un unique antécédent dans $[a, b]$, que faut-il aussi prouver ?

Exercices

Exercice 1

Déterminer si, oui ou non, la fonction f définie par :

$$f(x) = x \left\lfloor 1 + \frac{1}{x} \right\rfloor$$

est continue en 0.

Exercice 2

Les (deux) questions sont indépendantes.

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ continue telle que $\frac{f(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l < 1$. Démontrer que f admet un point fixe.
2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ périodique et admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = 0.$$

1. Soit $\varepsilon > 0$.

(a) Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que

$$\forall x \geq A, \forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(x+n) - f(x)| \leq n\varepsilon.$$

(b) En déduire qu'il existe un nombre réel M (dépendant de ε) tel que

$$\forall x \geq A, \quad \left| \frac{f(x)}{x} \right| \leq \frac{M}{x} + \varepsilon.$$

(c) Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

2. Que se passe-t-il si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x)) = \ell \neq 0$ est finie ?

Exercice 4

Étudier le comportement local en 0 puis le comportement asymptotique en $+\infty$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \quad g(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor, \quad h(x) = x^2 \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor.$$

Exercice 5

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles pour tout $x \in [a, b]$,

$$0 < g(x) < f(x).$$

Montrer qu'il existe $m, M \in]0, 1[$ tels que pour tout $x \in [a, b]$,

$$m f(x) \leq g(x) \leq M f(x).$$

Exercice 6

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit décroissante. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 7

Démontrer que tout polynôme de degré impair admet au moins une racine.

Exercice 8

1. Démontrer que si une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en x_0 , alors $|f|$ est continue en x_0 .
2. Montrer que la réciproque est fausse.

Exercice 9

Soient $a, b > 0$. Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction

$$x \mapsto (a^x + b^x)^{1/x}.$$

Exercice 10

On considère une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} (ax)^2, & \text{si } x \leq 1, \\ a \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

où $a \in \mathbb{R}$ est une constante réelle. Pour quelles valeurs de a la fonction f est-elle continue ?

Exercice 11

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que la suite $(f(n))_{n \geq 0}$ diverge vers $+\infty$. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 12

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction continue. Démontrer que f admet au moins un point fixe.

Exercice 13

Soient $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ deux fonctions continues telles que

$$g \circ f = f \circ g.$$

On veut démontrer qu'il existe un réel c tel que $f(c) = g(c)$. On note $s \in [0, 1]$ un point fixe de f et on définit une suite (u_n) par

$$u_0 = s \quad \text{et} \quad u_{n+1} = g(u_n).$$

1. Justifier l'existence de s .
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 0$, u_n est un point fixe de f .
3. On suppose que la suite (u_n) est monotone. Démontrer le résultat.
4. On suppose que la suite (u_n) n'est pas monotone.

(a) Démontrer qu'il existe $u, v \in [0, 1]$ tels que

$$(f - g)(u) \cdot (f - g)(v) \leq 0.$$

(b) Conclure.

Exercice 14

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0, 1]$.

1. On suppose que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$. Démontrer qu'il existe $a \in [0, 1]$ tel que $f(a) = a$.
2. On suppose que $[0, 1] \subset f([0, 1])$. Démontrer qu'il existe $a \in [0, 1]$ tel que $f(a) = a$.

Exercice 15

Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $[0, +\infty[$.

Exercice 16

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que la suite $(f(n))_{n \geq 0}$ diverge vers $+\infty$. Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.